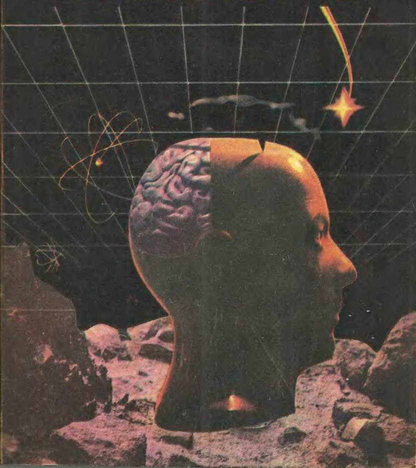
FLORICA T. CÂMPAN

povestiri despre probleme celebre



FLORICA T. CÂMPAN

POVESTIRI DESPRE PROBLEME CELEBRE

(CONVORBIRI DESPRE MATEMATICĂ)



EDITURA ALBATROS
BUCUREȘTI
1987

Lui
TEODOR,
prietenul gîndurilor mele

MATEMATICA PRIVITĂ CA UN SISTEM CULTURAL

Acum cîteva zile m-am pomenit cu Nucu, nepotul neuitatului meu prieten Teodor Solonar. Avea o carte în mînă şi cu faţa luminată de un zîmbet mi-a spus:

— Tare aş vrea să discut cu mata cîteva lucruri din cartea aceasta, cum se întîmpla odinioară, cînd era unchiul meu. V-am ascultat de atîtea ori pe cînd eram student şi apoi, mai tîrziu, după ce am terminat şi, uneori, mi-e dor de zilele acelea... Îmi închipui cu cîtă curiozitate ar fi citit Bădia cartea aceasta şi cu ce plăcere v-ar fi provocat la vorbă!

— Curiozitate ai zis? Cuprinde ea chiar ceva atît de deosebit de problemele, pe care le discutam odinioară?

— Desigur. Puteţi judeca după titlu. Se cheamă *Matematica privită ca un sistem cultural*, e scrisă de Raymond Wilder şi a apărut în 1981.

— Da, titlul sună oleacă altfel decît acela al cărţilor cu care ne delectăm noi, Dar, îţi spun drept că nu m-aş încumeta să o deschid pînă ce nu stabilim, în mod clar, ce se înţelege prin sistem?

— Nimic mai uşor. Ştiu unde-i locul *Dicţionarului de Filosofie*, al aceluia din 1978, adică ediţia a II-a. La pagina 638 scrie că prin *sistem* se înţelege: „Mulţime de elemente şi mulţime de relaţii între aceste elemente, relaţii relativ invariabile faţă de anumite reguli ale transformărilor care formează *structura* acestor mulţimi. Totalitatea de elemente care constituie sistemul nu poate fi redusă la elementele sale sau definită prin ele... Nefiind reductibile la elementele care le compun, sistemele posedă proprietatea *integralităţii*, au caracter integral..."

— Prea bine. În această definiţie se poate integra şi matematica, însă...

— Ştiu, mata vrei ceva mai mult. Iată şi completarea: „Ştiinţele particulare pun în evidenţă existenţa sistemelor integrale...în cunoaştere (de exemplu, sistemul axiomelor geometriei euclidiene)". Şi mai departe: „Într-un sistem

integral, dată fiind legătura dialectică dintre *întreg* şi *parte*, ansamblul este condiţionat de către componente, iar acestea din urmă sînt supuse unei acţiuni integratoare din partea sistemului. Orice sistem este alcătuit din *subsisteme*, care reprezintă, fiecare în parte, alte sisteme, cărora le sînt subordonate ansambluri de elemente".

— Ei, acum mai merge! Şi fiindcă tot ai dicţionarul în mînă, aruncă un ochi şi la cele ce scrie despre *cultură*.

— S-a făcut! Iată ce se spune la pagina 168: „*Cultură*, totalitate a produselor materiale şi spirituale ale muncii omeneşti, rezultate ale activităţii oamenilor de transformare conştientă a mediului lor natural şi social, ale dezvoltării şi perfecţionării omului". Şi mai departe: „În gîndirea modernă conceptul de cultură a devenit unul dintre cele mai complexe şi mai controversate. Ca înţeles fundamental, legat şi de sensul originar menţionat mai sus, cultura ia naştere şi se defineşte în opoziţie cu *natura*. . . Cultura cuprinde ansamblul fenomenelor social-umane care apar ca produse cumulative ale cunoaşterii şi, totodată, ca valori sintetice". De ajuns?

— Deocamdată poate că da. Aşa că putem deschide cartea şi să vedem ce spune.

— Autorul consideră că matematica poate fi privită ca un *sistem cultural* creat de om, atît în vederea adaptării, cît şi pentru propriile lui satisfacţii intelectuale.

— Dar, după cîte văd, o consideră şi ca o substructură a *culturii generale*! În privinţa asta sînt de acord cu el, fiindcă e bine cunoscut că asupra matematicii acţionează anumite forţe culturale şi, astfel, îi stabileşte evoluţia.

— Desigur, în prezent acesta este modul în care trebuie privită matematica, spre deosebire de acela legat de trecutul îndepărtat, cînd matematica s-a manifestat doar ca un *element cultural*.

— Dacă te referi la Babilon sau la Egipt, ai dreptate. Atunci geometria exista doar ca un capitol al aritmeticii în care se învăţa cum se calculează lungimile, ariile sau volumul anumitor figuri geometrice. Şi dacă mă vei întreba de ce s-a dat prioritate aritmeticii şi nu geometriei, am să-ţi răspund că ideea de număr a fost mai aproape de spiritul omenesc decît aceea de spaţiu. Aşa că, deşi babilonienii cunoşteau teorema lui Pitagora cu vreo mie de ani mai înainte de a se fi născut Pitagora, totuşi, pentru ei, această teoremă nu exista ca un *adevăr geometric*, ci ca *unul aritmetic*. Astăzi putem spune că ea reprezintă problema numerelor pitagoreice

din teoria numerelor, adică ale acelor triplete de numere întregi pentru care $n^2=n_1^2+n_2^2$.

— M-a încîntat observația autorului legată de „copacul matematic" !

— Te referi la analogia care se folosea odinioară între dezvoltarea matematicii și aceea a unui copac ? *Copacul matematic*, ale cărui rădăcini sînt *Fundamentele matematicii*, iar din trunchiul lui se dezvoltă ramurile principale : aritmetica, geometria, algebra, topologia, fiecare dintre aceste ramuri purtînd vlăstare noi, ca, de pildă, teoria grafurilor care se desface din ramura topologiei, ș.a.m.d. ?

— Da, căci această imagine nu mai rezistă ! Cum să reprezinți *Geometria analitică*, disciplină care cere colaborarea dintre cele două ramuri principale : ale geometriei și algebrei ? Sau algebrele booleene în care alături de ramura algebrei trebuie să se manifeste și contribuția rădăcinii ?

— Și totuși, această imagine a copacului matematic avea farmecul ei. De multe ori ne odihneam privindu-l, deși observasem și noi anumite nepotriviri !

— Am găsit aici o altă reprezentare grafică a matematicii, potrivită concepției de sistem cultural, introdusă de antropologul L. A. White, în 1975. Matematica apare ca un *sistem de vectori*, fiecare dintre vectori, corespunzînd unui anumit capitol : *aritmetica, geometria, algebra, logica matematică, fundamentele matematicii* etc., avînd o direcție, sens și mărime legată de problema urmărită. Acești vectori se întîlnesc sau se pot întîlni între ei ca să formeze anumite noi domenii de cercetare, astfel că evoluția matematicii să apară ca o urmare firească ale acestor compuneri vectoriale, petrecută în decursul timpurilor.

— O asemenea schemă vectorială fixează, în adevăr, diferitele aspecte ale evoluției matematice printr-un șir de sisteme vectoriale, spune autorul, observînd că mărimea vectorilor sau direcția lor se schimbă ; anume, într-o epocă *vectorul geometriei* crește repede, în timp ce alți vectori rămîn oarecum pe loc, iar în alta, *vectorul analiză* are o creștere accelerată, ori, ca în epoca modernă, vectorul *teoriei* mulțimii s-a desprins din domeniul analizei ș.a.m.d.

— Și ca o consecință a acestui fapt, văd că spune mai departe, tot el : „aceste schimbări care s-au produs fie în timp, fie cerute de modelul unei anumite culturi, ne face să stabilim o deosebire între *istoria* și *evoluția* culturii matematice. *Istoria* este o *descriere* a evenimentelor trecute, așezate în ordine cronologică, împreună cu unele discuții asupra



Grigore C. Moisil

relaţiilor (de pildă cauzale) ale acestor evenimente, pe cînd *evoluţia* este *procesul de schimbare*, un proces în care diferitele forme sau structuri se transformă în forme sau structuri îmbunătăţite, motivate, în general, de anumite forţe a căror natură depinde de tipurile, de formele sau de structurile implicate. *Istoria culturală* stabileşte evenimentele culturale particulare, pe cînd *evoluţia culturală* arată schimbările pe care le suferă formele acestei culturi.

— Cu alte cuvinte, după cîte văd, autorul pune accentul, în primul rînd, pe *evoluţia culturală* şi trece *istoria culturală* pe planul al doilea ! În discuţiile pe care le purtam noi odinioară, unchiul tău cu mine, ne străduiam să privim evoluţia unei anumite probleme din matematică din punct de vedere istoric.

— Da, dumneavoastră aţi tratat evoluţia culturii matematice în sine, din punct de vedere istoric, lăsînd deoparte acţiunile diferitelor forţe sau împrejurări care şi-au spus şi ele cuvîntul în decursul acelei dezvoltări, cu toate că aceste aspecte se influenţau reciproc! Ca să fim mai concreţi, ar fi bine să ne referim la un exemplu particular.

— Bine, dacă alegem conceptul modern de *funcţie*, constatăm că el a trecut prin diferite etape, unele rezultate din argumentele aduse de diferitele şcoli, iar altele cerute de

necesitatea de a generaliza această noțiune astfel ca ea să satisfacă la anumite cerințe.

— Știu că mata ai cartea matematicianului Gr. C. Moisil, *Știință și umanism*, în care au fost adunate multe dintre sclipitoarele lui gîndiri. N-ai vrea să citim de acolo despre *funcțiile recurente* ?

— Cu dragă inimă ! Uite cartea.

— Am găsit ceea ce căutam, la pagina 197 : „O anumită atitudine în filosofia matematicilor, numită *intuiționism*, a îndemnat pe matematicieni să studieze din ce în ce mai mult actul de numărare, trecerea de la 1 la 2, de la 2 la 3 ș.a.m.d. — scurt, ceea ce se numește raționament prin recurență. Teoria *funcțiilor recurente* este un nou capitol al matematicii. Marele matematician și gînditor sovietic A. A. Markov a privit altfel problema. Atunci cînd construiesc un obiect, trebuie să am o rețetă, un proiect de construcție. Această observație însă este valabilă și cînd construiesc un obiect matematic ; trebuie să-mi dau un algoritm de construcție. Și A. A. Markov, pentru a satisface cerințele sale filosofice „*constructiviste*" a creat o Teorie a algoritmului. Un algoritm este un șir de reguli fixe. O *funcție recursivă* e ceva care ne face să trecem de la 1 la 2, de la 2 la 3 ș.a.m.d. Că în fond, ele sînt același lucru, aceasta e o teoremă. Că ele dau modelul unei mecanizări, deci că ele se apropie de munca pe care o face calculatorul, iată un lucru pe care începem să-l înțelegem".

— A venit foarte la timp intervenția ta. Ea a pus mai clar în evidență rațiunea de a fi ale acelor schimbări care stabilesc *evoluția* noțiunii de funcție. Procesul *istoric* însă se leagă de relatarea evenimentelor care au apărut în timpul evoluției noțiunii de funcție. De pildă, discuțiile lui d'Alembert cu Euler și Johann Bernoulli în legătură cu problema coardei vibrante, sau acelea care s-au ivit o dată cu lucrările lui Fourier despre seriile trigonometrice și, mai ales, contribuțiile lui Dirichlet, Riemann, Weierstrass, etc. la precizarea noțiunii de funcție !

— Da, am putea considera că faptele istorice ilustrează și descoperă totodată modelele culturale și forțele care au cauzat un anumit proces cultural.

— Cred că istoria logicii ar putea ilustra cît se poate de bine aceasta !

— Să încercăm. Descoperită de filosofii greci, logica a pătruns în matematica greacă și prin ea s-a dezvoltat *metoda axiomatică*. Elementele lui Euclid cuprind primul exemplu, de deduceri logice. Atît în filosofie, cît și în matematică,

Logica a trecut prin fazele sale medievale ca apoi, datorită lui De Morgan şi Boole, să se dezvolte *logica simbolică*, devenind astfel, în secolul al XX-lea un domeniu independent al matematicii sub numele de *Logica matematică*. Logica matematică s-a difuzat repede, atît în *Fundamentele matematicii*, cît şi în *Programarea matematică*. Fără această răspîndire a metodelor şi conceptelor matematice nu ar fi putut exista cultura tehnologică actuală şi nici dezvoltarea modernă a matematicii care şi-a găsit aici modele noi pentru diferite alte teorii matematice.

— Aş propune să ascultăm, din nou, părerile matematicianului Gr. C. Moisil, specialist în acest domeniu : „De vreo sută de ani logica a intrat pe făgaşul matematizării. Progresele ei ca logică matematică au fost mari. S-au creat capitole noi, cum e logica relaţiilor ; s-au dezvoltat capitole abia abordate înainte, cum e logica propoziţiilor ; s-au introdus idei adînci, cum e teoria tipurilor ; s-au valorificat nuanţe ; s-au dovedit rezultate tulburătoare, cum e teorema de incompletitudine a lui Gödel (care afirmă că faţă de orice formalizare propusă pentru aritmetică, există propoziţii aritmetice adevărate, care nu pot fi obţinute în cadrul formalizării considerate. Adică nici o formalizare nu poate cuprinde întreaga Aritmetică), imposibilitatea caracterizării complete a numerelor naturale, dovedită de Skolem, independenţa teoremei alegerii, demonstrată de Cohen (axioma alegerii afirmă că, fiind dată o familie de mulţimi disjuncte nevide, există o mulţime care conţine cîte un element şi numai unul din fiecare mulţime a familiei ; independenţa axiomei alegerii constă în faptul că nici ea, nici negaţia ei, nu vin în contradicţie cu celelalte axiome ale teoriei mulţimilor)". Mai departe (p. 195) el completează cele spuse : „Logica matematică schimbă orizontul disciplinelor axiomatizate. Se sperase că o dată formalizată şi axiomatizată, despre o disciplină deductivă se va putea spune că nu poate duce la contradicţie. Paradoxul lui Gödel arată că o astfel de speranţă nu poate fi simplist realizată Se credea că numărul natural, adică numerele 1, 2, 3, 4 ... nu ridică nici o dificultate. Paradoxul lui Skolem arată că aceste numere naturale nu sînt aşa de simple cum par".

— Să privim acum şi celălalt punct de vedere, acela că matematica este o *substructură a culturii generale*. În acest caz, ca şi în alte substructuri, matematica a trebuit să fie supusă, în decursul dezvoltării ei, la diferite influenţe impuse de necesităţile sociale.

— Aceasta se vădeşte prin multe exemple. Unul ar fi chiar numele de *geometrie*, care în greceşte înseamnă *măsurarea pămîntului*, pe care grecii au dat-o, traducîndu-i înţelesul ce-l avea la egipteni, acelei ştiinţe pe care ei au creat-o şi, care, nici pomeneală nu-i să se mai ocupe cu asemenea măsurători ! Ei au făcut din geometrie o ştiinţă teoretică şi logică.

— Da, sau dacă ne apropiem de epoca modernă, constatăm că matematica a fost constrînsă, datorită cercetărilor din domeniul fizicii, făcute de Galileu şi alţi fizicieni, să găsească metode pentru determinarea vitezei şi acceleraţiei unui corp în mişcare, adică să cerceteze problemele legate de fenomenele instantanee pe care nu le considerase niciodată pînă atunci. Prin *Calculul diferenţial şi integral* putem afirma că a început epoca modernă a matematicii.

— Şi studiul teoriei căldurii sau a sunetului, în secolul al XIX-lea, oferă un exemplu de influenţă a problemelor din domeniul Fizicii asupra obiectului matematicii, care a avut loc în timpul perioadei de tranziţie de la lucrările lui Newton şi Leibniz la matematica secolului al XX-lea. Tot aşa, cerinţele tehnice ale celui de-al doilea război mondial au contribuit la *inventarea calculatoarelor electronice*, au stabilit *teoria informaţiilor*, *teoria jocurilor* etc.

— O forţă dintre cele mai stabile, care acţionează în evoluţia culturală a matematicii, este aceea care conduce la procesul de *unificare* dintre două sau mai multe concepte matematice independente, ori teorii matematice, ori metode matematice independente, astfel ca să formeze o *structură nouă*, avînd un potenţial mai mare decît fiecare dintre componente în parte. Iată cîteva exemple : *Unificarea algebrei şi a geometriei* a condus la crearea *Geometriei analitice*. *Unificarea noţiunilor de proiecţie*, aşa cum erau ele folosite la facerea hărţilor, cu acelea ale *geometriei euclidiene* au format *Geometria proiectivă*. Prin legarea *algebrei* cu *logica* s-a format *Logica matematică*. *Teoriile matematice unite cu teoriile fizice* au condus la crearea *Fizicii matematice* ş.a.m.d.

— O altă consecinţă interesantă, care rezultă din faptul că descoperirile matematice sînt privite ca făcînd parte dintr-un proces cultural, este aceea că înlătură, ştergînd cu buretele — adică dîndu-le o explicaţie plauzibilă — toate controversele asupra priorităţilor în legătură cu marile descoperiri. Cum ? Foarte simplu : „Cînd un sistem cultural se dezvoltă pînă la un nivel la care un concept sau o metodă sau o teorie este pe punctul de a fi inventată, atunci se ivesc *mai mulţi*


Carl Friederich Gauss

cercetători care sînt preocupaţi de acea problemă şi care au toate condiţiile pregătite ca să stabilească, *independent unul de altul, aceeaşi soluţie, în acelaşi timp.* Soluţia se prezintă ca o nouă combinaţie, sau sinteză de elemente, în curentul interactiv al culturii".

— Şi cînd te gîndeşti cît sînge rău şi-au făcut, de-a lungul secolelor, atîţia matematicieni, care cu bună-credinţă căutau argumentele prin care să susţină prioritatea favoritului lor contra celuilalt, care, şi el de bună-credinţă se simţea năpăstuit degeaba ! Din mulţimea atîtor cazuri aş aminti numai celebrele dispute dintre *Newton şi Leibniz* cu privire la *descoperirea Calculului diferenţial* sau dintre *János Bolyai, Gauss şi Lobacevski* în legătură cu *Geometriile neeuclidiene !*

— Mi s-a părut foarte interesant că R.L. Wilder menţionează anumite legi care guvernează evoluţia matematicii. Dar el nu conferă acestor legi un caracter de imuabilitate, ci numai unul analog legilor fizice, adică acela de a avea o mare posibilitate în a se repeta. Iată cîteva dintre ele :

„Prima demonstraţie a unei teoreme importante este urmată, de obicei, de altele mai simple.

Dacă dezvoltarea unei teorii matematice depinde de unificarea anumitor concepte, atunci această unificare va avea loc.

Continua evoluţie a matematicii este însoţită de o creştere a rigurozităţii. Fiecare generaţie de matematicieni consideră că este necesar să justifice, sau să arunce, presupunerile tacite, făcute de generaţiile dinainte.

Un sistem matematic evoluează numai prin abstractizări mai adînci, ajutat de generalizări și unificări etc.

În ultimele decenii, matematica are o aplicație tot mai largă în celelalte domenii științifice, tehnologice sau culturale. Ea este în general folosită fie ca instrument sau limbaj, fie ca o sursă a configurațiilor conceptuale. Folosirea matematicii ca limbaj s-a dezvoltat mult, nu numai datorită calculatoarelor electronice, ci prin aplicarea rezultatelor din alte ramuri ale matematicii ca : logica matematică, matematica constructivă, teoria combinatorică etc. Rolul matematicii în dezvoltarea altor științe apare și ca sursă a configurațiilor conceptuale. Pentru Einstein, *Calculul* lui Ricci și *Geometria riemanniană* așteptau gata pregătite. Pentru un fizician matematica nu-i numai un instrument cu ajutorul căruia se pot calcula fenomenele, ci și izvorul conceptelor și a principiilor cu ajutorul căreia se pot crea teorii noi".

— Aceste observații pe care autorul le-a legiferat dovedesc că matematica face parte din adîncul ființei lui. Pe cînd le citeai, îmi răsăreau în minte unele observații pe care le făcea în mod spontan și Teodor Solonar, atunci cînd ne prindea noaptea prin pădure, întorcîndu-ne spre casă, sau zorile, în zilele ploioase. . . Dar mai ales mi-am amintit de o discuție foarte însuflețită, ce am avut-o cu el, prilejuită de un articol asupra „Istoriografiei matematicii de la Proclus la Cantor" la recenzia căreia lucra atunci.

— Mi-ar face mare plăcere să reconstituim convorbirea aceea, fiindcă și Wilder face cîteva observații asupra modului în care ar trebui scrisă istoriografia matematică, ținînd seama de faptul că matematica ar trebui privită ca un sistem cultural. El citează chiar cîteva lucrări asupra istoriei matematicii din antichitate, în care s-au și introdus considerații asupra metodelor axiomatice sau ale aparatului logic. El insistă că este necesar ca, realizîndu-se statutul cultural, să se adauge noi puncte de vedere, prin care să se cerceteze rolul pe care îl joacă atît forțele de unificare sau de selecționare, cît și simbolismul, abstracția etc., în evoluția matematicii.

— Ei bine, discuțiile noastre atingeau uneori și aceste puncte, dar nu în mod programat, ci ca niște sclipiri momentane, cărora nu le dădeam nici o importanță.

— Da, știu, și totuși în mine mai trăiește atmosfera aceea de bună dispoziție care se ivea de îndată ce ibricul cu cafea apărea pe masă. . . În privința istoriografiei matematice e adevărat că prima lucrare de acest gen a rămas de la Proclus Diadohul, care a trăit prin secolul al V-lea și a scris printre

altele un *Comentariu asupra lui Euclid*. În această carte el nu dă numai referințe istorice asupra matematicii grecești, numindu-l, de pildă, pe Tales care a adus geometria din Egipt, ci arată că prima istorie a matematicii a fost scrisă de către Eudemos din Rodos, în secolul al IV-lea î.e.n. și apoi vorbește despre o altă scrisă de Geminos din Rodos, prin secolul I e.n. Datorită lui Proclus s-au păstrat pînă acum multe fragmente din istoria matematicii scrisă de Eudemos, așa că, cu drept cuvînt el a făcut operă de istoriografie matematică.

— Cînd recenza lucrarea lui Struik, despre care ți-am vorbit, avea pe masa lui o mulțime de cărți. Eu voiam să-l las să lucreze, dar el nici nu a vrut să audă, motivînd că aceea e treaba pe care o face cînd e singur, nu cînd are cu cine sta de vorbă. Uite, ai aici — a continuat el — cea mai scumpă comoară din cîte există pe acest pămînt, căci în aceste cărți nu-s numai gîndurile celor ce le-au scris, ci sînt concentrate și gîndurile sutelor de matematicieni începînd din cele mai vechi timpuri de cînd există omenirea.

— Ei să nu exagerăm, i-am răspuns eu, doar nu vrei să-mi spui că Adam a pus bazele matematicii ?

— Nu o spun eu, ci o afirmă Iosif Flavius, care a scris istoria poporului evreu. În cartea I a acestei istorii el afirmă că descendenții lui Adam au descoperit matematica și astronomia, că ei au prezis potopul și că să Seth a săpat cunoștințele lui matematice pe două coloane...

— Cunosc eu povestea asta, numai că un alt scriitor, mai competent, a arătat că Iosif Flavius al matale s-a înșelat, fiindcă el a confundat pe Seth cu Sesostris, regele Egiptului, și e adevărat că coloanele lui Sesostris au apărut cu inscripțiile săpate pe ele după ce s-au retras apele potopului.

— Așa o fi spunînd istoria matale, dar eu am luat povestea cu Seth, nu din Flavius, ci din prima carte de geometrie pe care a scris-o celebrul matematician francez din secolul al XVI-lea, Pierre de la Romée cunoscut sub numele de Ramus, primul profesor de matematici din Paris, care a fost omorît în noaptea de Sf. Bartolomeu, în 1572 ! Dar dacă nu te emoționează această noutate, atunci să o luăm cuminte, de la cartea lui Proclus !

— Vezi, așa m-a luat atunci unchiul tău în focuri, ca apoi să-mi citească fragmentele lui Eudemos despre cuadratura lunulelor stabilite de Hipocrat, apoi despre Pitagora și școala lui matematică și să tragă concluzia că matematicienii greci erau îndrăgostiți de obiectul matematicii în sine și de aceea noțiunile matematice au jucat un rol important în

sistemele lor filosofice, în special în școala lui Pitagora și în aceea a lui Platon. Îmi mai amintesc de plăcerea cu care el mi-a atras atenția asupra „Colecției matematice" în 8 cărți, dintre care însă prima s-a pierdut, iar a doua există numai în parte, scrisă, probabil prin secolul al III-lea de către Pappus din Alexandria. Îmi arăta că aceasta este foarte prețioasă nu numai pentru informațiile pline de competență, despre problemele de geometrie stabilite de matematicienii greci și pierdute, printre altele, acelea ale lui Euclid și Apollonisus dar mai cu seamă pentru mulțimea informațiilor legate de istoria matematicii !

— Da, și mie mi-a vorbit odată de Pappus cu încîntare, arătîndu-mi că prin el începe epoca comentatorilor și se sfîrșește aceea a producerilor originale. Matematicienii care i-au urmat s-au mărginit să-l imite pe el, comentînd lucrările înaintașilor. Dar aș mai adăuga că tot la sfîrșitul secolului al IV-lea, probabil că sub influența cărților lui Pappus, filozoful Augustin a arătat în lucrările lui o deosebită admirație pentru matematică. Astfel, prin autoritatea sa, filozofii scolastici au considerat că matematica este demnă de studiat.

— Cît de departe erau ei de cele ce afirmă N. Bourbaki în *Elemente de istorie a matematicii* ! Îmi amintesc perfect că scrie : „Adevărul matematic constă în deducerea logică bazată pe anumite premise puse în mod arbitrar de axiome".

— Nu o spune numai Bourbaki, ci toți matematicienii, de acum !

— Bine spus „de acum", căci au trebuit vreo trei secole ca să se înțeleagă acest lucru !

— În cele trei secole care au trecut s-au stabilit atîtea lucruri frumoase în istoria matematicii și mă gîndesc cu jind la acelea pe care le-ați discutat pe-ndelete cu Bădia ! Tare mi-ar fi plăcut să le fi auzit și eu ! De pildă, zilele trecute am dat peste problema taurilor Soarelui...

— Ai dreptate. Prietenul meu și unchiul tău avea darul să adulmece problemele pe care o dată ascultate, să nu le mai poți uita. Printre ele a fost și aceasta și multe altele. Eu mi-am notat cîte ceva despre ele și, dacă te interesează vino să le discutăm, ca și cum ar fi și prietenul meu cu noi. Împreună sper să facem față dificultăților. În cartea „Ultimele gînduri", scrisă de H. Poincaré și publicată după ce autorul nu mai era în viață, am găsit acest gînd : „Oamenii nu se înțeleg, pentru că nu vorbesc aceeași limbă și există limbi care nu se învață". Noi, din fericire, vorbim aceeași limbă, așa că ne vom înțelege.

PROBLEMA DESPRE TAURII SOARELUI

Într-o vară, prietenul meu Teodor Solonar din Cîmpulung Moldovenesc m-a invitat la el. Am primit cu bucurie, gîndindu-mă la plimbările ce le vom face prin maiestuoasele păduri către munții din apropiere, cavaleri supuşi ai voievodului Rarău, şi care poartă pe creştet, drept coroană, Pietrele Doamnei.

Dar după cîteva zile senine vremea s-a stricat. Din cerdacul cu geamlîc priveam cum se zbate în pîclă conturul munților sau urmăream goana burhaiului[1] pe deasupra pădurilor, ca un fum dens şi alb, de parcă ploaia ar fi aprins copacii. Într-o dimineață, pe cînd norii se ocărau cu înverşunare scăpărînd fulgere de mînie, prietenul meu, pasionat matematician, aduse un caiet şi, punîndu-l pe masa din cerdac, îmi spuse :

— Vrei să dezlegăm problema taurilor lui Helios ?

— A taurilor lui Helios ? întreb eu nedumerit. Pare mai degrabă o problemă de mitologie decît de matematică. Ştiu că Homer povesteşte despre ei în cîntul al XII-lea din *Odiseea*. Ascultă versurile...

— Se poate, mi-a răspuns prietenul după ce m-a ascultat fără să mă întrerupă. Dacă le-ai spus bine sau rău n-am de unde s-o ştiu, ritmul însă l-ai păstrat perfect. Eu le cunosc din traducerea lui Murnu, pe care o am aici :

„Iar cînd scăpăram noi de stînci, de Scylla
Şi de Charybda cea cumplită, iată
Ne pomenim la insula cea sfîntă
A zeului. Acolo erau boii
Cei mîndri şi frumoşi, oi multe grase
De-a Soarelui. . ."

— Te înşeli, i-am răspuns eu, tu mi-ai citit numai începutul, pe cînd eu ți-am recitat şi versurile în care se arată că nenoro-

[1] Ceață (rară) care se ridică după ploaie.

cirea lui Ulise a început atunci cînd tovarășii lui, îndemnați de Evriloh, s-au ospătat cu boii cei grași ai Soarelui. Nu văd însă cum s-ar putea țese o problemă matematică din firele acestei tragedii.

— Dar nu s-a gîndit nimeni la tragedia lui Ulise. Autorul problemei se întreabă doar cîți tauri și cîte vaci pășteau atunci pe insula Siciliei ? El e curios să afle cît de mari erau turmele atotputernicului Zeus, cel care s-a putut mînia așa de cumplit pe niște bieți oameni lihniți de foame. . .

— Se vede că autorul tău n-a cunoscut *Odiseea !* Eu știu foarte bine cît de numeroase erau acele turme, căci i-o spunea Circe lui Ulise cînd îi prevestea nenorocirile ce-i stăteau în cale. Nu-ți aduci aminte de începutul cîntului al XII-lea ? „Vei sosi în insula Trinacria, unde pasc boii și oile Soarelui, cîte 7 cirezi de fiecare fel și fiecare de cîte 50 de capete. Aceste vite nu fată și nici nu mor și nici nu îmbătrînesc, iar fetele Soarelui, acele zîne cu păr de aur, pasc turmele. . "

— Așa spunea Circe, care nu-și bătea capul cu matematica. Dar autorul problemei consideră că Helios, zeul soarelui, putea dispune de turme mai bogate decît acelea amintite de ea. Nu cred că Circe avea o noțiune prea precisă despre numere. Pe vremea ei, 50 era un număr foarte mare și mă îndoiesc că ea ar fi putut să-l intuiască.

— Dacă problema ta este destul de simplă, citește-o, să văd ce voi înțelege din ea.

— Bine, întîi ascult-o și apoi vom sta de vorbă :

„Calculează-mi, prietene, numărul vitelor cornute ale lui Helios, dar să te gîndești serios, dacă ai pretenție de om de știință. Cîte pasc în cîmpiile Siciliei, insula cu 3 unghiuri? Ele se împart în 4 cirezi de culori diferite. Unele sînt albe ca laptele, altele de un negru strălucitor, altele roșii, iar ultimele bălțate. Fiecare cireadă are un număr mare de tauri și sînt unii față de alții în acest raport :

1. Cei albi sînt atîția cît $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$ împreună din cei negri plus toți cei roșii ;

2. Cei negri sînt cît $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{5}$ din cei bălțați, plus toți cei roșii ;

3. Cei bălțați sînt $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{7}$ din taurii albi, plus numărul total al celor roșii ;

4. Vacile cele albe sînt $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ din întreaga cireadă neagră ;

5. Cele negre $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ din toată cireada bălţată, cînd vacile pasc la un loc cu taurii ;

6. Cele bălţate fac $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ din cireada vitelor roşii ;

7. Cele roşii fac cît $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ din toată turma albă.

Dacă-mi spui numărul cornutelor Soarelui, separat numărul taurilor bine hrăniţi şi pe cel al vacilor, şi cîte din fiecare culoare, nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nu vei fi socotit nici printre învăţaţi. Căci iată ce se mai ştie despre aceste vite ale lui Helios :

8. Atunci cînd mulţimea taurilor albi se uneşte cu aceea a celor negri, ei formează împreună o figură pătrată, iar marea lor întindere umple toată suprafaţa insulei cu trei unghiuri.

9. În fine, dacă taurii roşii se aşază pe rînduri, împreună cu cei bălţaţi, începînd cu unu şi crescînd succesiv cu cîte unu, ei formează o figură de forma unui triunghi, fără să fie printre ei tauri de altă culoare şi fără să se remarce absenţa acestora. Dacă vei afla şi vei putea arăta care sînt aceste numere, atunci înaintează glorios şi triumfător, prietene, convins fiind că eşti un om desăvîrşit în această ştiinţă".

— După stil, aş zice că problema este o traducere.

— Desigur, ea a fost scrisă în versuri greceşti. Cuprinde 22 de distihuri, hexametri alternînd cu pentametri.

— Am mai întîlnit în antologia greacă probleme scrise în versuri. Ele sînt numite *epigrame*. Îmi aduc aminte, de pildă, de aceea în care se cerea să se afle cît cîntăreşte statuia Minervei : „Eu sînt o Minervă de aur masiv. Metalul este un dar al tinerilor poeţi..." Sau de aceea cu bazinul de apă, pe care-l umplea o cişmea în chip de leu : „Sînt un leu de bronz, două izvoare curg din ochii mei, altul din botul meu şi altul din laba mea dreaptă. În două zile ochiul meu drept umple bazinul, ochiul meu stîng în trei..." şi aşa mai departe, întrebarea fiind în cît timp se umple bazinul cînd toate izvoarele curg împreună.

— Într-adevăr, problema taurilor este o epigramă, deşi cuvîntul nu-i potrivit !

— Se prea poate, dar e o numire consacrată. Grecii au numit astfel inscripţiile, adesea în versuri, gravate pe monu-

mente, morminte sau statui. Dar chiar din epoca alexandrină, epigramele nu se mai compuneau pentru a fi înscrise pe monumente, ci ca să fie citite în diverse ocazii, ca poezii. Însă, în culegerile care le-am cercetat eu n-am întîlnit nici una cu taurii Soarelui, deşi nu exagerez dacă-ţi spun că am găsit vreo 40 de probleme-epigrame.

— N-avea cum să figureze în vechile antologii greceşti, pentru că aceasta a fost descoperită de-abia în 1773, de către Lessing, într-un manuscris necercetat pînă atunci.

— Lessing ? Celebrul scriitor şi dramaturg ? S-a ocupat de matematici ?

— Un motiv în plus ca să te apropii şi tu cu mai multă dragoste de ele !

— Totuşi, nu-mi vine să cred ! Am citit *Minna von Barnhelm*, *Emilia Galotti*, *Nathan înţeleptul*, am mai citit *Scrisorile privitoare la literatura cea mai recentă*, *Laocoon* şi articolele din *Dramaturgia de la Hamburg*, dar nicăieri nu am dat de vreo aluzie, din care să deduc că el ar fi scris ceva despre problema taurilor sau despre oricare altă problemă de matematici !

— Nu ai găsit-o în lucrările despre care-mi vorbeşti, fiindcă Lessing a publicat-o într-o culegere de texte greceşti, urmate de comentarii. Manuscrisele acestor texte se aflau în biblioteca din Wolfenbüttel. El le-a găsit, le-a cercetat şi publicat în 1773, pe cînd era bibliotecar acolo.

— Da, cunosc această ultimă şi amară partea a vieţii lui.

— Desigur că viaţa lui era amară din clipa cînd îşi termina serviciul de bibliotecar; dar poţi tăgădui oare, că acolo, în bibliotecă, nu trăia el clipe de desfătare ? Cînd răsfoia cărţile din jurul lui sau găsea vreun manuscris nedescifrat încă, uita de mizerie ! Imaginează-ţi ce surprins trebuie să fi fost cînd a dat peste aceste rînduri ; „Problema pe care a propus-o Arhimede într-o scrisoare către Eratosthene din Cyrene, acelora din Alexandria care se ocupă cu asemenea lucruri !".

— Aşadar, problema a fost compusă de Arhimede ? De ce nu mi-ai spus-o de la început ? Ai considerat că-i mai interesant să o învălui în mister !

— Nu o învălui eu, că era gata învăluită în mister, de îndată ce se afirma că autorul ei este Arhimede !

— Cum aşa, nu-i negru pe alb ?

— O fi, dar Lessing, care ştia probabil şi el atîta greacă cît şi tine, a pus la îndoială autenticitatea problemei. De aici s-au stîrnit o mulţime de discuţii !

— Cred și eu ! Numai că, nu înțeleg cum ar putea afirma cineva, care nu cunoaște îndeaproape opera lui Arhimede, dacă o problemă e scrisă de el sau nu ?

— Nu greșești punînd în acest fel întrebarea, numai că atunci și chiar mai tîrziu, în tot cursul veacului al XIX-lea, matematicieni mult mai competenți ca tine și ca mine au admis părerea lui Lessing, fără să se sesizeze de faptul că el nu cunoaște îndeaproape nici viața și nici opera lui Arhimede.

— Și dacă Lessing s-a îndoit de autenticitatea ei, cum de a mai publicat-o ?

— Se vede că problema i-a plăcut ! Ba i-a plăcut așa de mult, încît a prezentat-o unui savant matematician din orașul său, rectorul Chr. Leiste, rugîndu-l să o verifice Căci nu ți-am spus că, în manuscrisul găsit de Lessing, problema se continuă cu o notă, în care se arată rezultatul.

— De ce nu-i spui *scolie*, căci acesta-i termenul consacrat în literatură, pentru *notele* care urmează după un text ?

— Fie. Această scolie cuprindea, fără a indica felul în care a fost stabilită, următoarea soluție a problemei :

„Fie A numărul taurilor albi și a numărul vacilor albe,
„ N „ „ negri „ n „ „ negre
„ R „ „ roșii „ r „ „ roșii
„ B „ „ bălțați „ b „ „ bălțate

$A = 829\,318\,560 = \frac{5}{6}N + R$

în total $A + a = 1\,405\,827\,360$

$a = 576\,508\,800 = \frac{7}{12}(N + n)$

$N = 596\,841\,120 = \frac{9}{20}B + R$

în total $N + n = 988\,300\,800$

$n = 391\,459\,680 = \frac{9}{20}(B + b)$

$B = 588\,644\,800 = \frac{13}{42}A + R$

în total $B + b = 869\,910\,400$

$b = 281\,265\,600 = \frac{11}{30}(R + r)$

$R = 331\,950\,960$

în total $R + r = 767\,088\,000$

$r = 435\,137\,040 = \frac{13}{42}(A + a)$

În total 4 031 126 560

Rectorul Chr. Leiste a cercetat problema şi a stabilit că, lăsînd de o parte ultimele două condiţii, numerele arătate de scoliast o verifică. Totodată, el a găsit o altă soluţie, care are avantajul să se exprimă prin numere mai mici. Aceasta se obţine împărţind numerele arătate de scoliast prin 80.

— Oricum, straşnice numere! Sînt curios cît timp cer asemenea calcule?

— N-avem decît să încercăm! După cum vezi, afară toarnă cu găleata!

— Atunci, hai la treabă! Întîi ajută-mi să traduc în limbajul algebric şi în ordinea indicată de text cele 9 condiţii impuse de problemă. Cred că e bine să păstrăm notaţiile pe care le-ai indicat mai sus. Ce spui?

— Desigur. Însă nu văd cum îţi pot ajuta eu, fiindcă tu ai şi început să le scrii foarte corect.

— Ei bine! Atunci priveşte cele 9 ecuaţii, pe care le numerotez, ca în text, cu cifre romane:

$$\text{I. } A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)N+R$$

$$\text{II. } N=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)B+R$$

$$\text{III. } B=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)A+R$$

$$\text{IV. } a=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(N+n)$$

$$\text{V. } n=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(B+b)$$

$$\text{VI. } b=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(R+r)$$

$$\text{VII. } r=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(A+a)$$

VIII. $A+N$ să fie un pătrat.

IX. $R+B$ să fie un număr triunghiular.

Nu înţeleg de ce numerele fracţionare sînt exprimate ca sumă de două fracţii cu numărătorul 1, cînd era mult mai simplu să se fi făcut adunarea lor şi să se fi scris un singur număr fracţionar?

— Acest mod de a scrie **fracţiile, m-a lămurit** prietenul meu, nu-i întîmplător şi nu arată neştiinţă, ci o influenţă de origine egipteană. Egiptenii priveau numerele fracţionare ca pe nişte numere aparte, care reprezentau o anumită parte a unităţii. De exemplu : o jumătate era reprezentată printr-un semn special, corespunzător în scrierea noastră notaţiei $\frac{1}{2}$, o pătrime avea alt semn, echivalent semnului nostru $\frac{1}{4}$ ş.a.m.d. După cum vezi e vorba numai de fracţii cu numărătorul 1.

— Această reprezentare a fracţiilor trebuie să fi apărut în procesul de măsurare a suprafeţei unui teren, care nu cuprindea un număr întreg de unităţi de arie. Putea să rămînă exprimată, prin unitatea respectivă: $\frac{1}{2}$ de unitate sau $\frac{1}{4}$ sau $\frac{1}{8}$. Pentru mărimea acelei porţiuni de teren ei au stabilit atunci notaţii speciale, pe care le-au privit ca pe nişte *noi unităţi de măsură*.

— E drept, dar fracţiile s-au ivit şi la întocmirea calendarului. Anul a fost împărţit în 12 luni şi luna în 30 de zile. Prima zi a lunii era socotită ca reprezentînd $\frac{1}{30}$ dintr-o lună, ziua a 10-a înseamnă deci $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ din lună. Tot aşa s-au ivit fracţiile şi în alte procese de măsurare. De aceea egiptenii au notat fracţia-tip $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3,...)$ cu un semn special.

— Mi se pare că aceste fracţii au şi un nume special ?

— Da, fracţiilor cu numărătorul 1 li se spune, uneori, fracţii alicote.

— Egiptenii au folosit în calculele lor numai fracţii alicote ?

— Se pare că da, deşi tot la egipteni au apărut, mai tîrziu, alături de aceste fracţii, şi fracţiile de forma $\frac{2}{n}$, unde n este impar $(n=2p+1)$.

— Cred şi eu că n trebuie să fie impar, căci dacă n este par, fracţia se reduce, prin simplificare, la o fracţie alicotă ! Pentru acestea, au inventat alte semne ?

— Nu, ci le-au redus la fracțiile alicote. În unul dintre cele mai vechi papirusuri matematice rămase de la ei, papirusul Rhind, care se află la Londra, în Biblioteca de la British Museum, se găsește o tabelă de descompunere a fracțiilor de forma $\frac{2}{n}$ începînd de la $n=4$ la $n=101$, în fracții cu numărătorul 1.

— Dar pe $\frac{2}{3}$ nu-l descompuneau ?

— Uneori da, în $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, însă de cele mai multe ori această fracție, ca și $\frac{3}{4}$, care intervenea adesea în calculele lor, era lăsată așa. Pe toate celelalte le descompuneau. De exemplu, în loc de $\frac{2}{5}$ ei scriau $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$ sau $\frac{2}{29}=$ $=\frac{1}{29}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{174}$.

— Bine, dar acest calcul pare foarte complicat. Eu nu m-aș pricepe de loc la el !

— Pentru egipteni, din contră, această reducere a fracțiilor de forma $\frac{2}{n}$ la o sumă de fracții-tip reprezintă o simplificare a problemei. Deși descompunerea ar fi putut fi făcută în moduri diferite, ea era făcută numai într-un singur fel, așa cum se arăta în tabele ; se constată aceasta din diferite manuscrise matematice care au fost descifrate. De altfel, tocmai fiindcă un calcul cu fracții era destul de greu de efectuat, problema fracțiilor a căpătat o așa de mare importanță în timpurile vechi. Descompunerea imaginată de egipteni a fost folosită și de greci și s-a menținut pînă tîrziu, în primele secole ale erei noastre. De aceea nu-i de mirare că întîlnim fracțiile din problema noastră, scrise sub această formă. Dar noi n-avem decît să le transformăm după cum dorești. Deocamdată ne limităm numai la primele trei ecuații :

I. $A=\frac{5}{6}N+R$ sau : $6A=5N+6R$

II. $N=\frac{9}{20}B+R$ sau : $20N=9B+20R$

III. $B=\frac{13}{42}A+R$ sau : $42B=13A+42R$

— Deși ecuațiile nu-mi par prea complicate, nu mă împac cu 3 ecuații și 4 necunoscute. Mi-aduc aminte că ar trebui să fie tot atîtea ecuații cîte necunoscute. Ba, dacă mă uit la întregul sistem pe care îl am în fața mea, și el îmi pare tot așa de curios, căci sînt în total 9 ecuații și numai 8 necunoscute.

— Într-adevăr, problema are 8 necunoscute, legate în prima parte a problemei prin 7 condiții ; la acestea se adaugă în partea a doua, încă două condiții. În general, ecuațiile dintr-o problemă traduc în limbaj algebric diferitele condiții la care sînt supuse mărimile necunoscute. Dacă numărul condițiilor nu egalează pe acela al mărimilor necunoscute, ci rămîne mai mic decît ele, înseamnă că sistemul de ecuații este *nedeterminat* și valoarea necunoscutelor rămîne nedeterminată. Cu alte cuvinte, problema poate avea mai multe soluții, toate la fel de acceptabile și legate între ele printr-unul sau mai mulți factori, care pot lua valori arbitrare, ca, de pildă, valorile pe care le indica scoliastul în problema taurilor și acela la care ajunge rectorul Chr. Leiste. De ce ? Pentru că scoliastul indică o soluție a problemei, în care nu se ține seamă de ultimele două condiții, acelea că „$A+R$ este un pătrat și că $T+R$ este un număr triunghiular". E vorba de un sistem nedeterminat de 7 ecuații cu 8 necunoscute.

Nici Leiste nu a considerat ultimele două condiții, rezolvînd același sistem nedeterminat de 7 ecuații cu 8 necunoscute. De aceea, din valorile obținute de el se găsesc acelea ale scoliastului, prin înmulțire cu *factorul constant* 80. Nu-i același lucru cînd numărul ecuațiilor este mai mare decît al necunoscutelor. Unei singure mărimi nu-i poți impune să satisfacă mai multe condiții diferite, căci acestea sînt în general contradictorii. Cînd se întîmplă așa, problema este considerată imposibilă și nu are soluții. Dar s-ar putea ca, deși aparent numărul ecuațiilor să fie mai mare decît numărul necunoscutelor, unele dintre ecuații să repete sub altă formă anumite condiții puse anterior și, în acest caz, numărul ecuațiilor să fie egal cu cel al necunoscutelor. Atunci problema are o soluție unică, deși aparent părea imposibilă. Cum se prezintă problema taurilor vom vedea pe parcurs ; deocamdată să rezolvăm și noi sistemul nedeterminat pe care îl avem în față. Am putea încerca să eliminăm pe N și B.

— N poate fi uşor eliminat dacă înmulţim prima ecuaţie cu 4 şi o adunăm la a doua. Avem în acest caz : $24A=9B+44R$.

— Într-adevăr, să considerăm acum sistemul

$$24A=9B+44R$$

$$42B=13A+42R$$

şi să procedăm la fel.

— Da, dar aici 9 şi 42 au ca factor comun pe 3, aşa că prima ecuaţie o voi înmulţi cu 14 şi a doua cu 3. Prin adunare se obţine :

$$297A=742R \text{ sau } A=\frac{742}{297}R$$

— Ai obţinut pe A în funcţie de R. Mai departe sper că nu mai am nevoie să intervin.

— Cred şi eu. Din primele două ecuaţii găsesc pe N şi B:

$$N=\frac{178}{99}R \text{ şi } B=\frac{1\,580}{891}R$$

— Atunci hai să rezolvăm şi celelalte patru ecuaţii care urmează.

Întîi am să le scriu sub forma :

$$\text{IV. } a=\frac{7}{12}(N+n) \qquad \text{VI. } b=\frac{11}{30}(R+r)$$

$$\text{V. } n=\frac{9}{20}(B+b) \qquad \text{VII. } r=\frac{13}{42}(A+a)$$

Cred că ar trebui să înlocuiesc pe A, B şi N şi apoi să văd ce obţin.

— Poate că ar fi prea complicat. Ai putea încerca aceeaşi metodă de mai înainte, anume să elimini pe n din ecuaţia a IV-a şi a V-a, apoi din ecuaţia pe care ai s-o găseşti şi din a VI-a pe b şi apoi, din noua ecuaţie şi a VII-a pe r. Ai să găseşti astfel o ecuaţie care conţine numai pe a şi A, B, N. Aici poţi înlocui pe A, B şi N cu valorile cunoscute şi vei obţine pe a în funcţie de R. Ca să găseşti acest rezultat deodată înmulţeşte ecuaţia a IV-a cu 4 800, a V-a cu 2 800, şi a VI-a cu 1 260, a VII-a cu 462 şi le adună.

— Într-adevăr, în acest caz avem:

$$4\,800a+2\,800n+1\,260b+462n=2\,800\,(N+n)+$$
$$+1\,260\,(B+b)+462\,(R+r)+143(A+a)$$

sau:

$$4\,657a=2\,800N+1\,260B+462R+143A$$

Înlocuind, făcînd adunările şi eliminarea numitorului, rămîne

$$a=\frac{2\,402\,120}{297\times 4\,657}R.$$

Acum înlocuiesc pe a în ecuaţia a VII-a şi-l aflu pe r, în ecuaţia a VI-a îl aflu pe b, iar din ecuaţia a V-a îl găsesc pe n.

Dar, drept să-ţi spun, mă înspăimîntă atîtea calcule. Vezi că n-am avut răbdare să-l înmulţesc nici pe 297 cu 4 657.

— Nici nu era nevoie. Ba e mai convenabil să descompunem numărătorul şi numitorul în *factori primi*, pentru eventuale simplificări în calculele ulterioare. Cred că-ţi mai aduci aminte de numerele prime?

— Ceva în legătură cu divizorii unui număr?

— Da. Orice număr natural în afară de 1 are doi sau mai mulţi divizori adică se împarte exact prin două sau mai multe numere întregi. De pildă, numărul 2 se împarte exact cu 1 şi cu 2, numărul 3 cu 1 şi cu 3. Acelaşi lucru îl putem spune şi despre numerele 5, 7, 11, dar nu despre 6. Numărul 6 are 4 divizori pe 1, 2, 3, şi 6, iar 12 are ca divizori numerele, 1, 2, 3, 4, 6 şi 12. Sînt numere *prime* acelea care au numai 2 divizori (pe 1 şi pe el însuşi), şi *neprime* celelalte. Numerele prime au fost cunoscute de către matematicienii din şcoala lui Pitagora.

— Atunci, hai să-l descompunem pe a. Avem:

$$a=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 373}{3^3\cdot 11\cdot 4\,657}R$$

Din ecuaţia a VII-a urmează:

$$r=\frac{13\cdot 46\cdot 489}{3^2\cdot 11\cdot 4\,657}R.$$

Apoi din a VI-a

$$b=\frac{2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 761}{3^2 11\cdot 4\,657}R$$

şi, în fine, din a V-a

$$n=\frac{2\cdot 17\cdot 15\,991}{3^2 11\cdot 4\,657}R$$

— După cum văd, am exprimat 7 dintre necunoscute cu ajutorul lui R. Dar R poate lua orice valori?

— Desigur că nu ; numai acelea care, înmulţite cu oricare dintre fracţiile de mai sus, vor da ca rezultat un *număr întreg*. Aceasta fiindcă e vorba de *un număr de vite cornute* care pasc pe un cîmp. Rezultă dar că R trebuie să fie divizibil cu produsul $3^4\cdot 11\cdot 4\,657=4\,149\,387$.

— Aşadar, $R=3^4\cdot 11\cdot 4\,657x$, unde x este un număr întreg oarecare şi, ţinînd seama de această valoare a lui R, rezultă că cele 8 necunoscute sînt :

$$A=2\cdot 3\cdot 7\cdot 53\cdot 4\,657x=10\,366\,482x$$

$$N=2\cdot 3^2\cdot 89\cdot 4\,657x=7\,460\,514x$$

$$B=2^2\cdot 5\cdot 79\cdot 4\,657x=7\,358\,060x$$

(1) $$R=3^4\cdot 11\cdot 4\,657x=4\,149\,387x$$

$$a=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 373x=7\,206\,360x$$

$$n=2\cdot 3^2\cdot 17\cdot 15\,991x=4\,893\,246x$$

$$b=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 761x=3\,515\,820x$$

$$r=3^2\cdot 13\cdot 46\,489x=5\,439\,213x$$

— După cum vezi aceste valori nu coincid cu datele indicate în scolie. Acestea sînt soluţiile stabilite de Chr. Leiste. Pe celelalte le găseşti din (1) dacă faci $x=80$.

— Drept să-ţi spun - nu-mi vine să cred că după atîţia ani şi cu atîtea alte preocupări aş mai fi fost în stare să rezolv o problemă de matematici, i-am spus prietenului meu, satisfăcut şi emoţionat ca un şcolar, cînd am văzut şirul numerelor găsite de mine.

— Stai, nu te grăbi—mi-a răspuns el. Uiţi că obţinînd acest rezultat „nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nici nu vei fi socotit printre învăţaţi"?

— Nu uit şi totuşi mă întreb nedumerit cum de au stabilit grecii acest rezultat? Ştiu că ei nu cunoşteau sistemul poziţional ci notau numerele cu ajutorul literelor din alfabet. Cum s-au descurcat ei cu adunările, înmulţirile şi împărţirile, fără să mai spun nimic despre descompunerile în factori primi?

— Pentru ei problema a fost într-adevăr foarte complicată, dar nu nerezolvabilă. Calculele le făceau cu *abacul* adică *numărătoarea* cu care se joacă azi copiii la grădiniţă sau în prima clasă elementară. Dar nici în Europa, pînă prin veacul al XVI-lea, problema calculelor n-a fost mai uşoară, căci cifrele romane sau cele slavone nu se deosebeau decît prin semne de acelea folosite de greci. Însă despre calculul lor va trebui să discutăm altă dată. Acum, hai, să ne întoarcem la celelalte două condiţii impuse de problemă.

— Fie! Condiţia a VIII-a spunea că $A+N$ trebuie să fie pătrat, iar a IX-a că $R+B$ să fie un număr triunghiular. Nu cumva în aceste 9 ecuaţii vor fi mai multe condiţii decît e necesar?

— Să vedem. Deocamdată trebuie să avem $A+N=Z^2$. Adică considerînd valorile stabilite în (1):

$Z^2=2\cdot 3\cdot 4\,657x\cdot(7\cdot 53+3\cdot 89)$; însă $7\cdot 53+3\cdot 89=638=2\cdot 11\cdot 29$ ceea ce dă:

$$Z^2=2^2\,.\,3\,.\,11\,.\,29\,.\,4\,657x.$$

Înseamnă că x trebuie ales astfel încît suma $A+N$ să fie un pătrat. Spune-mi, deci, cît este x?

— Nu-i o întrebare prea grea: $x=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657$.

— Răspunsul tău mi-a dovedit că întrebarea a fost destul de grea! Ai observat bine că Z ar trebui să fie format numai din factori ridicaţi la pătrat, dar ai uitat să-i păstrezi toată generalitatea. Răspunsul exact ar fi trebuit să fie $x=3\cdot 11\cdot 39\cdot 4\,657t^2=4\,456\,749t^2$, t fiind un număr întreg oarecare.

— Ai dreptate! Introducînd acest factor nedeterminat t, adaug o nouă condiţie, şi, în felul acesta — ţinînd seama de IX — rezultă că problema va avea o soluţie unică! Dar, drept să-ţi spun, nu ştiu ce înseamnă un număr triunghiular!

— Un număr triunghiular este acela care se poate descompune în produsul $\frac{n(n+1)}{2}$, n fiind un număr întreg oarecare. Prin formă, el aminteşte de aria unui triunghi avînd ca bază un segment de lungime n şi ca înălţime un

segment de lungime $(n+1)$. Condiția a IX-a spune că suma $R+B$ trebuie să se poată scrie ca un astfel de produs, adică să avem :

$$R+B=\frac{n(n+1)}{2}=4\,657\cdot 3\cdot 11.\,29t^2(2^2\cdot 5\cdot 79+3^4\cdot 11).$$

Dar $2^2 . 5 . 79+3^4 . 11=2\,471=7 . 353$. De aici rezultă

$$\frac{n(n+1)}{2}=3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4\,657^2t^2.$$

Această condiție poate fi scrisă într-o formă mai simplă notînd $2n+1$ cu u și $2\cdot 4\,657\ t$ cu $v\cdot$ Înmulțind cu 8 avem :

(2) $$4n(n+1)=2n(2n+2)=(u-1)(u+1)=$$
$$=u^2-1=2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353v^2.$$

Făcînd produsul, ecuația (2) devine :

$$u^2=1+4\,729\,494v^2$$

Avem, așadar, de rezolvat, în numere întregi, o ecuație de forma $cv^2+1=u^2$, cunoscută în matematici sub numele de ecuația lui Pell.

Pe cînd prietenul meu vorbea despre ecuația lui Pell, prin fața cerdacului nostru, a trecut o pereche de tineri, cu hainele de ploaie lipite pe ei. Auzind numele Pell, tînărul a izbucnit în rîs, oprindu-se curios în fața geamului deschis. Întorcîndu-se către partenera sa, i-a spus jucăuș :

— Uite Pel și nu e Pell! Apoi ni s-a adresat nouă : Să nu vă supărați că am rîs, dar îmi pare foarte caraghios că nu mai scap de acest domn Pell nici aici, în mijlocul pădurii!

Ne-am uitat curioși la el, iar prietenul meu i-a răspuns :

— Poate faceți vreo confuzie, căci acest *domn Pell*, de care ați auzit adineauri, nu mai este de mult printre noi!

— Nu fac nici o confuzie și vă rog să mă iertați dacă v-am părut necuviincios! Dar e o coincidență așa de nostimă, că, drept să vă spun, n-am s-o uit niciodată. Mă refer la matematicianul englez de la începutul veacului al XVII-lea, al cărui nume latinizat era John Pellius. La acel domn Pell, care, pe lîngă că era un bun matematician, era și un mare savant și lingvist, dar se lăsa înșelat și furat de toți din jurul lui, încît de multe ori nu avea nici cu ce să-și cumpere cerneală și hîrtie și a murit într-o cumplită sărăcie. Sînt sigur că despre el vorbeați și dumneavoastră, nu-i așa?

— Adevărat, despre el vorbeam, a răspuns prietenul meu, din ce în ce mai mirat. Însă dacă-i vorba de el, îmi pare neînțeleasă și poate nelalocul ei expresia dumneavoastră „uite Pell și nu e Pell!"

— Se poate, dar aceasta-i o glumă a noastră, care vă asigur că nu are nimic necuviincios în ea... așa o tachinez eu pe nevasta mea, care-i matematiciană, cum bănuiesc că sînteți și d-voastră.

— Dacă-i așa, a răspuns gazda, dacă sînteți prietenii domnului Pell, atunci vă rog să poftiți mai aproape, fiindcă prietenii prietenilor noștri sînt și prietenii noștri! Poftim să bem o cafea împreună, pînă ce se vor mai usca și hainele d-voastră, căci, după cum văd, nu vă temeți de ploaie! Mă bucur că sîntem din aceeași breaslă!

— Numai pe jumătate, și nu-s eu cel cu pricina, ci nevastă-mea, a răspuns rîzînd, tînărul în timp ce au intrat amîndoi în casă și ni s-au prezentat. Nevastă-mea a absolvit vara aceasta Facultatea de matematică, pe cînd eu sînt de vreo doi ani asistent la istorie. Dar, drept să vă spun această întîmplare e chiar extraordinară! Prin martie — căci noi ne-am căsătorit iarna aceasta — ea a prezentat la sesiunea științifică a studenților o lucrare în care era vorba tocmai de ecuația lui Pell. Așa că, vă închipuiți cred, de cîte ori mi-a fost dat să aud în casa mea de Pell! Și cîte am mai avut de îndurat din cauza lui! Nici tu mîncare, nici tu teatru; la ordinea zilei era numai domnul Pell!

— După cîte înțeleg, am adăugat eu adresîndu-mă tinerei, care părea intimidată, soțului d-voastră îi cam place să vă necăjească, nu-i așa?

— O, da! Însă relativ la gluma lui cu „uite Pell și nu e Pell", ea are un tîlc. Mă necăjește așa de cînd i-am spus că această ecuație poartă numele unui matematician care nu s-a ocupat niciodată de ea! De atunci...

— Bine, dar n-am dreptate? a întrebat-o soțul ei, plin de vervă. Cît de naivi sîntem noi, *nematematicienii*, cînd luăm de bune cele ce afirmați voi, *matematicienii*! Iată cea mai bună dovadă că nu sînteți infailibili.

— De cîte ori ți-am spus, a protestat tînăra, că aici nu-i vorba de o demonstrație, ci numai de o documentare greșită din punct de vedere istoric.

— Nu știu despre ce fel de greșeală e vorba, a intervenit prietenul meu. Dacă există vreo anecdotă cu privire la ecuația lui Pell, mi-ar face plăcere să o aflu și eu. Noi vorbeam

despre ecuația lui Pell întîmplător; ajunsesem la această ecuație pornind de la o altă problemă.

— Totul e foarte simplu, a început tînăra cu vădită plăcere. Pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, marele matematician Euler, cercetînd această ecuație, a numit-o, probabil din eroare, *ecuația lui Pell*, deși Pell nu a publicat nimic în legătură cu ea. Dar o dată ce Euler a numit-o ecuația lui Pell, nimeni nu a mai pus la îndoială veridicitatea informației lui și toți au numit-o așa. Iar astăzi, deși se cunoaște adevărul și matematicienii propun chiar să i se schimbe numele, din obișnuință i se spune tot *ecuația lui Pell*!

— Mulțumesc pentru informație, a zîmbit prietenul meu curtenitor. Acum înțeleg tîlcul vorbelor de mai înainte! Se vede că și istoria matematicienilor are un călcîi vulnerabil. Fiind vorba de Euler, genialul matematician orb, greșeala e scuzabilă. Ultimii 17 ani din viață i-a petrecut fără să vadă de loc, iar dacă informațiile lui istorice au suferit din această cauză, infirmitatea nu l-a împiedicat să-și continue cercetările matematice cu o amploare și ușurință care a uimit pe contemporanii săi.

—Aveți dreptate, a aprobat noua noastră cunoștință. Contemporanii îl numeau „analistul încarnat", iar Arago a spus că Euler calcula fără nici un fel de sforțare, tot așa de natural cum plutesc vulturii în înălțimi sau cum respiră oamenii! Cît despre ecuația pe care văd că d-voastră ați scris-o sub forma $cv^2+1=u^2$, ea a fost cunoscută însă din antichitate. Desigur că nu în forma ei generală, dar sub diferite forme particulare. O găsim, de pildă în cartea lui Diofant...

— Ce șansă!—a întrerupt-o soțul ei, cu fața plină de zîmbet ! Formidabil. Să cunoști numai o singură chestiune din toată matematica și tocmai despre ea să ai ocazia să vorbești! Așa întîmplare nici la o mie de ani o dată nu se mai întîmplă! Nu găsiți și d-voastră că e formidabil?

— Mi se pare că sînteți cam gelos, l-am apostrofat eu, continuîndu-i jocul.

— Da, da, asta-i așa, a mărturisit cu grabă și tovarășa lui de viață, roșind de plăcere.

— Dacă sînt atacat din toate părțile, mă dau bătut! Admit să ascult a 1001-a oară această poveste!

— Atunci vă rugăm foarte mult, doamnă, să ne spuneți povestea acestei ecuații pînă la capăt.

— Vorbeam de Diofant. Nu se poate preciza în ce epocă a trăit, însă, cum arată renumitul cercetător al istoriei mate-

maticienilor, Paul Tannery, se pare că prin a doua jumătate a secolului al III-lea e.n. În cele șase cărți de aritmetică rămase de la el se găsesc și probleme care conduc la ecuații nedeterminate de gradul al doilea, ca de pildă „să se construiască un triunghi dreptunghic în numere", adică să se rezolve în numere întregi ecuația $x^2+y^2=a^2$.

— Bine dar aceasta-i teorema lui Pitagora!

— Da, e foarte probabil că și pitagoricienii și-au propus să rezolve asemenea ecuații. Se știe, de pildă, că Platon cunoștea soluțiile în numere întregi ale ecuațiilor $2x^2-y^2=\pm 1$. Se pare că și Arhimede ar fi rezolvat în numere întregi ecuațiile $3x^2-y^2=-1$ și $3x^2-y^2=2$.

Ecuația aceasta a preocupat și pe matematicienii hinduși. O găsim în cartea scrisă de Brahmagupta în secolul al VII-lea, de data aceasta nu numai prin exemple particulare, ci chiar sub forma ei generală. Brahmagupta încearcă să găsească o metodă de a o rezolva. În acest scop, el stabilește că pentru a afla soluțiile, în numere întregi, ale unei ecuații de forma

$$cv^2+1=u^2 \tag{3}$$

unde c nu este un pătrat, trebuie folosită o ecuație ajutătoare de forma

$$ca^2+k=b^2, \tag{4}$$

unde a și b sînt numere întregi pozitive, iar k — pe care-l numește *interpolator* — trebuie să aibă una dintre valorile: ± 1, ± 2 sau ± 4. Din această ecuație, Brahmagupta deduce apoi ecuația (3), folosindu-se de o lemă, pe care o demonstrează și îi dă numele de „principiul compunerii egalilor". Lema redescoperită de Euler și apoi de Lagrange, se enunță astfel: „Dacă avem ecuația $ca^2+k=b^2$, în numere întregi, atunci există și ecuația

$$c(2ab)^2+k^2=(b^2+ca^2)^2 \quad (k\neq 1). \tag{5}$$

E ușor de observat că ecuația (5) se reduce la ecuația lui Pell, dacă o simplificăm cu $k=\pm 2$ sau cu $k=\pm 4$. Dacă se poate stabili ecuația ajutătoare (4), prin ea se pun în evidență soluțiile, în numere întregi, ale ecuației (3), aplicîndu-se principiul lui Brahmagupta. Brahmagupta nu a dat însă o metodă generală de formare a ecuației (4), el a arătat numai unele metode empirice, stabilite prin încercări de la caz la caz. Abia în veacul al XI-lea, Bhaskara II a reușit să stabilească o metodă simplă și elegantă pentru a forma ecua-

ția care are ca interpolatori ± 1, ± 2 sau ± 4. Pentru aceasta, el s-a servit de o altă ecuație ajutătoare, formată tot în mod empiric, pornind de la ecuația dată. Bhaskara II a numit procedeul său *metoda ciclică*, arătînd prin aceasta că operațiile care se efectuează pentru a ajunge la rezultat se *repetă în mod continuu, ca într-un ciclu*. El stabilește următoarea lemă: „Dîndu-se ecuația

$$ca^2+k=b^2 \tag{4}$$

unde a, b și k sînt întregi, pozitivi sau negativi, există egalitatea:

$$c\left(\frac{am+b}{k}\right)^2+\frac{m^2-c}{k}=\left(\frac{bm+ca}{k}\right)^2, \tag{6}$$

unde m este un număr întreg arbitrar, care se alege în așa fel încît $\frac{am+b}{k}$ să fie un număr întreg și (m^2-c) să aibă cea mai mică valoare posibilă." După cum vedeți, ca formă relația (6) nu diferă de (4), însă are avantajul că $\frac{m^2-c}{k}$ este un număr întreg mai mic decît k și deci, prin aplicarea repetată a formulei (6) la ecuațiile stabilite în mod succesiv, se va ajunge la o ecuație în care interpolatorul k va avea una dintre valorile: ± 1, ± 2, sau ± 4. Acesteia i se aplică apoi lema lui Brahmagupta, și astfel se stabilesc rădăcinile ecuației (3).

Dacă vreți, vă pot arăta și un exemplu care se găsește chiar în cartea lui Bhaskara și pe care-l țin foarte bine minte, fiindcă mi-a plăcut forma poetică în care e formulată problema...

— Băgați de seamă! — a întrerupt iar tînărul cu o prefăcută seriozitate. Nu se lasă pînă nu vă va spune tot ce știe. De-abia cînd vă veți pierde răbdarea îmi veți da dreptate.

— Ba de loc, prietene. Lăsați-o în pace! Auzim lucruri extrem de interesante.

— Pentru dv. ca matematicieni or fi fiind așa, dar nu vă gîndiți și la mine?

— Ba să avem iertare — i-am replicat îndată. Află că și eu sînt istoric, ca și dumneata, iar prietenul acesta al meu mă ține în cange de la răsăritul soarelui!

— Dacă-i așa, continuă, scumpă soțioară, continuă, dar teme-te de Indra[1].

[1] Indra, zeița hindusă cu 4 mîini, este considerată ca una dintre divinitățile cele mai temute.

— Cu voia ori fără voia ta, am să citez problema din cartea lui Bhaskara. Ea e formulată astfel: „Spune-mi, prietene, dacă metoda prefacerii pătratului a cuprins mintea ta așa de complet cum cuprinde planta agățătoare un copac, care este pătratul care, fiind înmulțit cu 67 și adăugîndu-i-se unitatea la produs, dă un pătrat?,,De fapt, în cartea lui Bhaskara sînt produse două ecuații dar eu v-am citat una singură. Din problemă rezultă $67x^2+1=y^2$.

— Atunci să formăm și ecuația ajutătoare. Cred că, urmînd indicațiile care ni le-ați dat, putem pune $x=1=a$ și să căutăm pentru b un număr al cărui pătrat să fie foarte apropiat de 67. Asta înseamnă 8. Rezultă deci egalitatea

$$67 \cdot 1^2-3=8^2. \tag{7}$$

După notațiile din (4) avem:

$$a=1,\ b=8,\ c=67 \text{ și } k=-3.$$

Aplicăm lema lui Bhaskara:

$$67\left(\frac{1\cdot m+8}{-3}\right)^2+\frac{m^2-67}{-3}=\left(\frac{8m+67}{-3}\right)^2 \tag{8}$$

Valoarea lui m trebuie aleasă în așa fel, încît $\frac{m+8}{3}$ să fie un întreg iar m^2-67 să fie un număr cît mai mic posibil.

— Da. Prima condiție este îndeplinită pentru toate valorile lui m, de forma $m=-3t+1$, t fiind un număr întreg oarecare, căci, în acest caz, avem:

$$\frac{-3t+9}{-3}=t-3.$$

Pentru a doua condiție putem alege $t=-2$. Rezultă atunci $m=7$. Înlocuind în (8) pe m prin 7 se obține egalitatea:

$$67 \cdot 5^2+6=41^2 \tag{9}$$

— Acum aplicăm și egalității (9) lema de mai sus, nu-i așa?

— Desigur, continuăm prin metoda ciclică sau a prefacerii pătratului. De data aceasta, $a=5$, $b=41$, și $k=6$. Avem:

$$67\left(\frac{5n+41}{6}\right)^2+\frac{n^2-67}{6}=\left(\frac{41n+67\cdot 5}{6}\right)^2, \tag{10}$$

unde $\frac{5n+41}{6}$ trebuie să fie un număr întreg. Pentru aceasta putem considera $n=6t+5$. Rezultă:

$$\frac{30t+66}{6}=5t+11 \text{ şi } \frac{n^2-67}{6}=\frac{36t^2+60t-42}{6}.$$

Cea mai mică valoare a fracţiei se obţine pentru $t=0$, ceea ce conduce la $n=5$.

În acest caz, ecuaţia (10) se scrie astfel:

(11) $$67\cdot 11^2-7=90^2$$

— Şi acum ce mai facem?

— Aplicăm iar metoda ciclică şi deducem din (11) noua ecuaţie:

(12) $$67\left(\frac{11p+90}{-7}\right)^2+\frac{p^2-67}{7}=\left(\frac{90p+67\cdot 11}{-7}\right)^2.$$

— Condiţiile le ştim: $\frac{11p+90}{7}$ să fie întreg, aşadar $p=-7t+2$ şi $\frac{p^2-67}{-7}$ sau $\frac{49t^2-28t-63}{7}$ să fie cel mai mic întreg. Deci rezultă $t=-1$. Înlocuind această valoare a lui t în formula care dă p, avem $p=9$, iar (12) devine:

$$-67\cdot 27^2-2=221.$$

— În fine, dacă am ajuns să avem ca interpolator pe -2 s-a isprăvit cu metoda ciclică. Folosim acum lema lui Brahmagupta, nu-i aşa?

— Desigur: $c=67$, $a=27$, şi $b=221$. Înlocuind în (5) obţinem:

$$67\cdot(2\cdot 27\cdot 221)^2+4=(221^2+67\cdot 27^2)^2 \text{ sau}$$

$$67\cdot(2\cdot 5\,967)^2+4=97684^2 \text{ şi, împărţind cu 4:}$$

$$67\cdot(5967)^2\;1=(48\,842)^2.$$

Ultima egalitate conţine soluţia ecuaţiei. Ea ne arată că $x=5\,967$ şi $y=48\,842$.

— E foarte ingenioasă metoda şi vă mulţumim pentru ajutorul dv. Cînd au cunoscut europenii aceste cercetări ale matematicienilor hinduşi? Îmi închipui că destul de tîrziu?

— De-abia în veacul al XIX-lea ele au fost traduse din limba sanscrită în limba engleză. Între timp, europenii descoperiseră, pe altă cale, o metodă asemănătoare.

— Interesantă povestea aceasta a redescoperirilor unui același adevăr, de oameni din țări și timpuri diferite, cu mentalități și puncte de vedere diferite... a murmurat prietenul meu ca pentru sine. Crezi că tu ai descoperit ceva pentru prima oară, și cînd colo, altundeva, departe în timp și spațiu, altcineva a gîndit ca și tine la aceeași problemă, și a tresărit cu aceeași emoție ca și tine cînd a întrezărit soluția! În istoria matematicilor se cunosc destule cazuri. Putem aminti, de pildă, calculul integral, fundamentat de Newton și Leibniz în secolul al XVII-lea și totodată de Arhimede, prin secolul al III-lea î.e.n.

— Iar în ce privește rezolvarea acestei ecuații de către europeni, a replicat matematiciana, povestea are un început... cum să vă spun? aventuros, cu provocări la un fel de dueluri matematice...

— Atunci totul devine pasionant, am intervenit eu, și vă rugăm...

— Vă rog, vă rog, n-o mai rugați nimic, am și eu un cuvînt de spus. Hai, nevastă, la cășile noastre, că-i tîrziu!

— Da, ai dreptate, trebuie să ne ducem la gospodăria noastră! Să nu crezi că am uitat că-s gospodină!

— Dacă-i așa, nu insistăm, însă vă rugăm să ne permiteți să mai veniți să ne dați o mînă de ajutor, a spus prietenul meu.

— Cu mare plăcere, numai că, după cum v-a spus soțul meu, eu nu știu prea multe și ce am avut de spus, v-am cam spus !

— Cum se poate asta? — s-a mirat prietenul meu. A rămas doar chestia duelului și apoi tare aș mai vrea să vă cooptăm la problema noastră, adică mai bine zis a taurilor Soarelui...

— Cum ați spus? Taurii Soarelui? a întrebat, izbucnind într-un rîs copilăresc matematiciana. N-am auzit de o asemenea problemă și nici că mîndrul Soare ar fi fost proprietar de vite !

— Ei iată că a venit și vremea să-mi dați dreptate, a intervenit soțul. V-am spus că nu știe nimic în afară de Pell, Pell și iar Pell. Habar nu are de mitologia greacă! Credeți că și-a bătut capul cu *Odiseea*? Nu știe decît că a scris-o Homer!

— Atunci îți dai tu singur un vot de blam. Cînd te-am cunoscut, vorbeai cu atîta căldură de *Iliada* și *Odiseea* că te ascultam tot așa de fericită ca atunci cînd eram mică și bunicul meu îmi spunea povești. Cu această încredere sufletească m-am apropiat de tine, și tu? Te văd în stare să negi

clipele acelea! Şi, mă rog, dacă povestea lor se află în *Odiseea*, de ce nu mi-ai vorbit despte taurii Soarelui?

— Mă dau bătut, a răspuns cel apostrofat, Ca să ne împăcăm îţi voi spune pe drum tot cîntul al XII-lea. Dar şi Euripide aminteşte despre ei în *Troienile*, ori matale mi-ai spus că ai terminat de citit piesa lui Euripide. Cum se face că n-ai remarcat acesta? — a întcrs răspunsul tînărul, triumfător.

— Ai dreptate, — m-am amestecat eu —, de asta am uitat! Mi se pare că aceea care aminteşte despre ei este Casandra, cînd e luată ca roabă de Ulise, nu?

— Da, am citit tragedia şi-mi amintesc versurile, deşi atunci mi-a scăpat sensul lor. Aflînd că va fi roaba lui Ulise, la despărţirea de mama ei, Hecuba, Casandra o încurajează, provocînd atunci nenorocirile care se vor abate pe capul lui Ulise :

„Şi va cunoaşte naufragii
Pe marea cea sărată, va cunoaşte
Al lotusului dor, şi boii sacri
Ai Soarelui, care în carnea lor
Vor prinde grai şi-i vor trimite-amare
Voci lui Ulise..."

În timp ce tînăra recita cu avînt aceste versuri, mă uitam la prietenul meu. Peste durerea care, de un timp încoace îi modelase chipul, se aşternuse un zîmbet de caldă încîntare. Cu sinceritatea şi vioiciunea lor, tinerii aceştia ne-au cuprins în vraja farmecului lor şi amîndoi am insistat să ne viziteze iar :

— Aşadar, dacă plouă şi mîine, contabilizăm împreună cirezile lui Helios?

— Dacă-i vorba să mai rătăcim şi prin cîmpiile Siciliei, unde-şi ţinea Helios turmele, mă prind şi eu bucuros la taifas, — a spus tînărul înainte de despărţire, adăugînd : — Oricum, mîine dimineaţă va fi umed prin pădure, iar dacă înspre amiază se va lumina, vă vom ruga noi pe dv. să ne ţineţi tovărăşie pe drumul Măgurii, ca să dăm bună ziua Rarăului!

A doua zi dimineaţa cerul rămăsese închis. Noi n-am mai continuat problema, aşteptînd venirea tinerilor noştri prieteni. De altfel n-au întîrziat mult şi, după ce am golit cu toţii ceştile cu cafea puse înaintea noastră, i-a venit rîndul şi ecuaţiei lui Pell.


Pierre de Fermat

— În Europa, a spus prietena noastră, problemele din teoria numerelor au căpătat o largă dezvoltare pe la începutul veacului al XVII-lea, datorită genialului matematician francez Fermat.

— De fapt, Fermat era un diletant în matematici, de profesiune fiind judecător la Toulouse, a adăugat prietenul meu, continuînd : Ca să fac plăcere celor doi domni nematematicieni din preajma mea, aflați că era și un erudit lingvist!

— Iar pe Homer îl cunoștea tot așa de bine cum îl cunoaștea și soțul meu... De altfel a compus și versuri nu numai în limba lui natală, ci și în latinește și în limba spaniolă, pe atunci foarte la modă în Franța. Însă Fermat era un om modest, dovadă că nu a publicat și nici nu a pregătit pentru publicare vreuna din genialele lui descoperiri matematice. O parte din ele au fost cunoscute din corespondența pe care a purtat-o cu unii dintre matematicienii de atunci, cealată parte însă a fost găsită abia după moarte, de fiul său, Samuel. Fermat a murit în 1665. Peste 4 ani apărea volumul intitulat *Varia Opera,* tipărit de fiul lui. În anul următor, tot Samuel Fermat publica o nouă ediție a cărților lui Diofant...

— Dacă nu mă înșel — a întrerupt-o prietenul meu — prima ediție a lui Diofant a fost publicată de către Bachet de Mézirac, în 1621, textul fiind tipărit atît în limba greacă, cît și în traducerea latinească. Știu că Fermat citea cu pasiune această carte și a notat pe marginea filelor ei multe dintre frumoasele lui teoreme, printre care și teorema celebră, rămasă nedemonstrată pînă azi.

— Mi se pare că acum s-a demonstrat şi această faimoasă teoremă. Nu ştiu precis, fiindcă lucrarea n-a apărut încă, dar am auzit vorbindu-se despre acest eveniment la noi, la Seminarul matematic din Iaşi!

— Da? De către cine a fost demonstrată?

— Tot de către un matematician francez, dar fiindcă nu cunosc alte amănunte, prefer să ne întoarcem la problema noastră. Samuel Fermat a publicat, la începutul cărţii lui Diofant, teoremele stabilite de tată său, anume tocmai acelea găsite pe marginea paginilor cărţii de care vorbeaţi dv., precum şi altele, aflate în scrisorile adresate unui prieten.

— Ştiu că moda scrisorilor cu conţinut matematic, filozofic, sau literar era în toi prin veacurile al XVII-lea şi al XVIII-lea. Acele scrisori treceau din mînă în mînă, erau copiate, comentate şi chiar trimise altor specialişti, care se ocupau de probleme înrudite, a adăugat tînărul. Deşi personale, scrisorile aveau un caracter public şi multe dintre ele, ale căror originale s-au pierdut, se cunosc azi numai fiindcă s-au păstrat în copii.

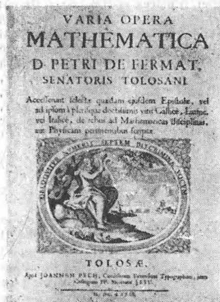
— Aşa e cazul şi cu scrisoarea adresată de Fermat lui Frénicle de Bessy, în care vorbeşte de ecuaţia lui Pell—a reluat voioasă vorbitoarea. Lui Bernard Frénicle de Bessy, consilier la Curtea Monetăriei, îi plăcea să-şi petreacă timpul liber rezolvînd probleme din teoria numerelor. El purta o largă corespondenţă matematică cu Fermat, fiind apreciat nu numai de acesta, ci şi de alţi matematicieni. Scrisoarea trimisă de Fermat lui Frénicle, în februarie 1657, a fost îndată copiată de un alt pasionat dezlegător de probleme din teoria numerelor, Claude Mylon, jurisconsult la Paris. La rîndul lui, acesta, fiind în corespondenţă cu marele matematician Chr. Huygens, îi trimite şi lui, în 2 martie, problema propusă de Fermat, iar la rîndul lui, Huygens o expediază, în 9 martie, profesorului său Schooten. Azi scrisoarea lui Fermat se cunoaşte numai datorită *acestei ultime copii*. Am adus cu mine notele lucrării despre care soţul meu a avut grijă să vă informeze. O redactez, fiindcă în toamnă va trebui să o public, aşa că am să vă citesc copia acelei scrisori :

„Orice număr care nu-i un pătrat, are proprietatea că se pot găsi o infinitate de pătrate prin care, înmulţind numărul dat şi adăugînd 1 la produs, să se obţină un pătrat. De exemplu: 3 nu-i un pătrat, înmulţit cu 1, care e pătrat, fac 3 şi, adăugîndu-i-se 1, fac 4, care este un pătrat. La fel 3×16, care nu e pătrat, fac $48+1=49=7^2$. Există infinite numere cu care

înmulţind pe 3 şi adăugîndu-i 1 fac un pătrat. Vă cer o regulă generală care să stabilească, fiind dat un număr care nu-i pătrat, cum se găsesc pătratele care, înmulţite cu numărul considerat şi adăugînd unitatea, să formeze numere pătrate. Care este, de exemplu, cel mai mic pătrat cu care înmulţind pe 61 şi adăugîndu-i unitatea, să formeze un pătrat? La fel, care este cel mai mic pătrat cu care, înmulţind pe 109 şi luînd unitatea, să facă un pătrat?

Dacă nu-mi trimiteţi soluţia generală, trimiteţi-mi-o în particular, pentru aceste două numere, pe care le-am ales printre cele mai mici, ca să nu vă dea prea multă osteneală. După ce voi primi răspunsul dv., vă voi propune altceva. Pare, fără a vă spune, că propoziţia mea e numai pentru numere întregi care să satisfacă problema, căci, în cazul celor fracţionare, cel mai slab aritmetician ajunge la capăt".

— Dar după cîte înţeleg, e vorba chiar de o ecuaţie la fel cu aceea pe care am discutat-o! Aşadar, Fermat este acela care propune pentru prima oară în Europa rezolvarea acestui gen de ecuaţii? Drept ar fi fost ca ecuaţia aceasta să poarte numele lui Fermat!



VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI

TOLOSÆ.

Pagină de titlu
din
Opera matematică
a lui
Pierre de Fermat

— Desigur, şi propunerea a fost formulată în multe cărţi, deşi chiar acei autori care fac propunerea continuă să-i zică tot ca mai înainte!

— Totuşi, mi se pare destul de curioasă această confuzie a lui Euler, ţinînd seama că Fermat era francez, pe cînd Pell era englez!

— Nu-i chiar aşa. În această istorie sînt amestecaţi şi englezi! Fermat, care nu a avut răbdare să aştepte răspunsul lui Frénicle, a mai trimis aceeaşi problemă, în chip de provocare, şi la doi dintre cei mai renumiţi matematicieni englezi : John Wallis, şi lord W. Brouncker. De fapt problema se prezenta ca a doua provocare din partea lui Fermat. Prima fusese trimisă cu vreo 2 luni mai înainte, ca urmare a unui schimb de păreri în legătură cu cartea publicată de John Wallis în 1655 : *Arithmetica Infinitorum*. Fermat căpătase cartea în vara anului 1656 de la Kenelm Digby — probabil un prieten —, cînd acesta venise la Toulouse. Citind-o, el a observat că unele dintre rezultatele expuse de Wallis fuseseră stabilite mai înainte de către Torricelli, şi i-a scris lui Digby. Acesta a transmis cele comunicate de Fermat lui Wallis.

— Şi acestuia numai plăcere nu a putut să-i facă!

— Întocmai. La rîndul lui, se supără şi Fermat şi ca urmare trimite a doua provocare, tot prin intermediul lui Digby. Am să vă citesc o parte din această scrisoare a lui Fermat, fiindcă ştiu bine că vă va interesa.

„Rar se propun chestiuni aritmetice şi puţini ştiu să le rezolve. Oare din cauză că aritmetica a fost tratată pînă în prezent mai mult cu ajutorul geometriei decît prin ea însăşi? E tendinţa care apare în cele mai multe lucrări, atît vechi cît şi moderne şi chiar în Diofant... Totuşi, aritmetica are un domeniu care îi e propriu ; teoria numerelor întregi ; această teorie a fost uşor schiţată de Euclid şi nu a fost îndeajuns cultivată de succesorii lui (decît dacă lucrările n-au fost incluse în cărţile lui Diofant care s-au pierdut). Aritmeticienii au deci sarcina să o dezvolte sau să o reînnoiască. Ca să le lumineze calea, le propun să demonstreze ca teoremă, sau să rezolve ca problemă, următorul enunţ : dacă vor ajunge, vor recunoaşte cel puţin că probleme de acest fel nu sînt inferioare nici ca subtilitate, nici ca dificultate, nici ca mod de demonstrare celor mai celebre din geometrie."

După această introducere, urmează problema pe care v-am citit-o.

— Într-adevăr, e interesantă această introducere, în care vibrează pasiunea lui Fermat pentru teoria numerelor!

— Şi, ca să vedeţi cît interes prezentau atunci aceste scrisori, am să vă mai spun, cu titlu de curiozitate, că lordul W. Brouncker primeşte scrisoarea la Londra în 14 martie şi o trimite chiar a doua zi la Oxford, lui Wallis. Amîndoi rezolvă problema, dar ca să rîdă de Fermat trimit răspunsul în englezeşte, şi nu în latineşte cum îl aştepta Fermat, care nu cunoştea limba engleză! Găsind un englez, venit atunci la Toulouse care ştia franţuzeşte, dar habar n-avea de matematici, din traducerea acestuia Fermat nu şi-a putut da seama dacă Wallis şi Brouncker au găsit sau nu metoda cerută. În 15 august 1657, Fermat îi scrie lui Digby, arătîndu-şi nemulţumirea : „În legătură cu problema despre numere, îndrăznesc să vă zic, cu respect şi fără să reduc nimic din înalta părere pe care o am despre naţiunea dv., că cele două scrisori ale Mylordului Brouncker, deşi obscure şi rău traduse, nu conţin după părerea mea, nici o soluţie. Nu înseamnă că eu aş vrea să reîncep luptele şi vechile lovituri de lance pe care le-au dat altă dată englezii francezilor, dar, fără să ieşim din metaforă, îndrăznesc să susţin în faţa voastră, domnule, care excelaţi mai mult ca alţii în ambele meşteşuguri, că hazardul şi fericirea se amestecă uneori în luptele ştiinţifice, tot aşa ca şi în altele..."

— Am citit undeva — a întrerupt prietenul meu, că Descartes ar fi spus despre Fermat, cu care a avut şi el de luptat: „Domnul Fermat este gascon, eu nu!" Mi se pare mie că avea dreptate.

— Ştiu eu? Istoricii îl consideră pe Fermat drept un om paşnic. Dar e greu de ştiut ce zace în sufletul omului. Pînă la urmă, acest duel franco-englez s-a soldat prin împăcare şi recunoaşterea reciprocă a meritelor acestor mari matematicieni! Se pot citi toate fazele acestei lupte în colecţia de scrisori, publicată un an mai tîrziu, în 1658, de către Wallis, intitulată : *Commercium Epistolicum* şi avînd ca subtitlu : *Corespondenţă recent schimbată asupra unor-chestiuni matematice între prea nobilii: Lord William Viconte Brouëncker, englez, Sir Kenelm Digby, cavaler englez, domnul Fermat, consilier în Parlamentul din Toulouse, dl. Frénicle, gentilom din Paris, şi Sir John Wallis, profesor de geometrie la Oxford, Dl. Frans von Schooten, profesor de matematică la Leyda şi alţii.* Aceste scrisori, care încep cu provocarea d-lui Fermat faţă de dl. Wallis, sînt dedicate : *Prea ilustrului şi prea nobilului Sir Kenelm Digby, cavaler în Anglia, prin intermediul căruia a fost purtată această corespondenţă matematică între anii 1656 şi 1658.*

— Acum apare clar și cauza greșelii lui Euler, a remarcat tînărul care ascultase cu interes scrisorile citite de soția sa. Foarte probabil că Euler cunoștea ceva în legătură cu aceste scrisori și tot el a atribuit soluția problemei lui Pell, care se ocupase de alte probleme, studiate și de Euler. Vezi — s-a adresat soției sale, acum aș putea să te acuz și eu pe tine, cum m-ai acuzat și tu cu *Odiseea*, că nu mi-ai spus niciodată nimic despre aceste scrisori! Cred că ar fi cazul să mă supăr că ai lăsat să plutească în mister această ecuație a lui Pell!

— Nu-i caz de supărare — a intervenit prietenul meu. Această ecuație a fost un episod care ne-a purtat mult noroc. Prin ea v-am făcut cunoștința.

— Deși mă asociez la părerea prietenului meu, aș vrea să-i atrag atenția tînărului meu coleg asupra pericolului acestei mărturisiri. Ciocolata care a apărut în dimineața aceasta pe masa noastră este încă o dovadă că gazda are intenția să fure locul blîndului domn Pell!

— Asta-i răsplata că ți-am ajutat să rezolvi sistemul celor 9 ecuații nedeterminate? — m-a întrebat Teodor Solonar.

— Care? Acelea ce au rezultat din problema taurilor Soarelui? — a intervenit cu cochetărie, eroina, în discuție. Sînt curioasă să cunosc această problemă și vă rog să mi-o spuneți!

— Foarte bucuroși de propunere. Dar ca să nu dau loc la bănuieli și totodată ca să văd ce a înțeles din explicația mea acest neprețuit prieten, îl rog să v-o explice chiar el. Cred că astfel îl vom atrage în discuție și pe soțul dv., ca pe un îndrăgostit de chestiunile legate de antichitate.

Nu mi-a fost greu să prezint problema și să ajung la primul grup al celor 7 ecuații. Explicațiile mele s-au adresat mai mult noului prieten, căci tovarășa lui nu avea nevoie de ele. Ea m-a ajutat și chiar a condus discuțiile ce au intervenit cu privire la ultimele două condiții, care au dus la ecuația cu pricina.

— Acum ar trebui să aplicăm metoda hindusă, pe care ne-ai arătat-o tu ieri — a tras concluzia soțul.

— Ba de loc — i-am spus eu. Renunț la calculul a cine știe cîte ecuații intermediare prin care ar trebui să aflăm interpolatorul cerut. Nu, nu! Am calculat eu destul pînă ați venit dumneavoastră!

Pe cînd protestam, prietenul meu a început să rîdă cu hohote. Ne-am uitat curioși și el ne-a spus:

— Nici nu se poate pune problema să facem aceste calcule, căci pentru asta ne-ar trebui o mașină de calculat și încă una electronică! Aflați că cea mai mică soluție a problemei este formată din numere care au fiecare cîte 206 545 de cifre. Vă puteți imagina un asemenea număr? Uite am aici o tablă de logaritmi. Are formatul obișnuit al unei cărți. Să numărăm cîte cifre cuprinde o pagină. Vedeți? Sînt 2 500 de cifre. Să împărțim acum 206 545 la 2 500. Rezultă că sînt necesare vreo 83 de pagini ca să se scrie numai unul singur dintre numerele care arată cîte vite cornute de o singură culoare și gen avea Domnul Soare în Sicilia !

— Atunci, dacă înmulțim 83 cu 9, ca să vedem pe cîte pagini trebuie imprimate cele 8 numere care arată mulțimea fiecărui fel dintre cornute și totalul lor, rezultă că s-ar forma o carte de vreo 750 de pagini !

— Iată de ce, a reluat prietenul meu, în 1 773, atunci cînd Lessing a propus această problemă, rectorului Chr. Leiste, ea i s-a părut destul de încîlcită și nu a putut ține seama decît de primele 7 ecuații. Soluția completă depindea de o ecuație Pell-Fermat, care, pe atunci nu fusese adusă la o formă ușor de mînuit.

— Dar ne-am luat cu vorba și am uitat să adaug — a intervenit tînăra matematiciană, că în cartea de algebră pe care a publicat-o Wallis în anul 1685, la vreo 20 de ani după ce murise Fermat, el da o demonstrație faptului că ecuația $cv^2+1=u^2$ se poate rezolva totdeauna prin numere întregi. Însă el a comis o eroare de raționament, băgată de seamă abia peste vreo 80 de ani de către doi mari matematicieni, unul francez, Lagrange, și celălalt german Gauss. Prin acești doi matematicieni ecuația apărea din nou pe scenă și atrăgea atenția matematicianului Leonhard Euler. El este acela care a publicat o metodă generală de rezolvare a ei și totodată i-a dat numele cu bucluc. Lagrange reia metoda propusă de Euler și modifică, cu ajutorul ei, propria sa metodă. Astfel ajunge la rezultate care amintesc pe acelea stabilite cu șase secole mai înainte de către hinduși. Aceste rezultate au fost expuse într-o formă deosebit de clară și de simplă de un alt matematician francez, Legendre, într-o lucrare rămasă celebră : *Încercare asupra teoriei numerelor*, apărută în 1797. Aveați deci dreptate afirmînd că rectorul Chr. Leiste nu putea să cunoască aceste rezultate, dat fiind că Legendre avea să publice cartea sa cu 24 de ani mai tîrziu!

— Leiste nu a atacat problema sub forma ei generală, ci s-a mărginit să considere numai cazul primelor 7 condiții.

Dar această soluţie nu a satisfăcut curiozitatea şi interesul matematicienilor pentru problema expusă de Lessing şi ea a continuat să-i preocupe. Mai întîi s-a observat că nici numerele indicate de scoliast, nici acelea obţinute de Chr. Leiste prin împărţirea cu 80 nu corespund dimensiunilor insulei Sicilia. S-au găsit calculatori pasionaţi, care au stabilit că suprafaţa insulei ar putea adăposti turma taurilor albi şi negri, dar în nici un caz cirezile întregi de tauri şi vaci. Din această pricină, unii matematicieni s-au şi îndoit de autenticitatea problemei.

— Dacă-i aşa, atunci problema mă interesează şi pe mine şi v-aş ruga să discutăm pe îndelete despre autenticitatea ei. Pe ce temeiuri s-a sprijinit oare Lessing atunci cînd şi-a exprimat îndoiala că Arhimede ar fi autorul? El era un adînc cunoscător al limbii şi literaturii greceşti şi, pe deasupra, el însuşi creator de opere literare. Nu-mi închipui că a putut face această afirmaţie, fără de vreun temei!

— Nu sînt de părerea ta, dragul meu soţ. Lessing nu era matematician şi nici nu cunoştea istoria matematicilor din antichitate. Şi ştii de ce? Pentru că pe vremea lui nu se întocmise încă o istorie a matematicilor bine documentată.

— E adevărat că prima lucrare de acest gen fusese scrisă în anul 1758 de Jean Etienne Montucla — a completat prietenul meu. Avea două volume şi se tipărise la Paris, dar deabia în 1799, cînd apare ediţia a 2-a a acestei lucrări, refăcută şi cuprinzînd patru volume, acesta a avut o mai largă circulaţie. Lessing a murit însă în 1781 şi nu cred că a cunoscut prima ediţie a cărţii lui Montucla. Ba, chiar dacă ar fi cunoscut-o tot nu s-ar fi putut informa de acolo asupra întregii opere a lui Arhimede, fiindcă ea a fost studiată mult mai tîrziu. Foarte probabil că afirmaţiile lui Lessing se referă mai mult la forma problemei, şi nu la fondul ei. Poate că el nu-şi putea închipui că Arhimede, genialul Arhimede, ar fi putut să-şi oprească gîndurile în loc, ca să caute cuvintele potrivite să exprime prin ritmul lor, datele unei probleme ce putea fi enunţată şi în proză! E adevărat că versurile pe care le-am citit adineauri nu au nimic deosebit. Ele sînt dintre acelea care se scriau în mod obişnuit pe la sfîrşitul evului mediu şi chiar mai tîrziu. Însă din aceasta nu rezultă că ele n-ar fi putut proveni şi din antichitate Eu am întîlnit în antologia greacă destule probleme în versuri.

— Exact acelaşi lucru l-am afirmat şi eu cînd prietenul meu mi-a citat acestă problemă şi găsesc cu cale să-i stabilim originea.

— Nimic mai simplu. Am să vă spun tot ce știu și rog să întrerupeți pe orator ori de cîte ori veți crede că trebuie lămurit sau pus ceva la punct. Mai întîi, cine s-a mai ocupat de această problemă? La început, aproape o jumătate de veac după tipărirea ei de către Lessing, nimeni n-a remarcat-o. O explicație ar fi: a fost dată la lumină într-o epocă de frămîntări sociale accentuate, 16 ani mai tîrziu se va declanșa marea revoluție franceză...

— Pe care Lessing nu a apucat-o.

— A murit cu 8 ani înainte.

— În aceste împrejurări nu se putea afla tihna trebuitoare pentru a aborda o problemă oarecum minoră și care avea de la început o faimă dubioasă — am spus eu.

— Poate — a adăugat cu îndoială tînăra doamnă. Deși nici problemele sociale și nici revoluția franceză nu au fost un impediment pentru progresul matematicilor, ci din contră. N-am decît să amintesc de lucrările lui Monge, Fourier sau ale lui Lagrange, pe care tocmai revoluția l-a scos din starea de apatie în care căzuse cu puțin înainte și l-a făcut să fie cel mai activ și entuziast profesor de la Școala Normală Superioară, atunci înființată... S-ar putea să fie numai o simplă întîmplare faptul că nimeni nu s-a mai ocupat de această problemă, timp de 50 de ani.

— Cred că aveți dreptate. Ați pomenit de Lagrange. Eu am citit undeva povestea acestei apatii. La un moment dat i s-a părut, după cum o spunea chiar el, că a ajuns la capătul puterilor și nu mai găsea nici o plăcere în studiul matematicilor. Mecanica analitică, lucrare care l-a făcut celebru a stat doi ani pe biroul său, fără să o deschidă măcar. Cînd a izbucnit revoluția, a fost îndemnat de prietenii lui din aristocrație și chiar de unii oameni de știință să se refugieze la Berlin, unde stătuse mulți ani înainte de revoluție. El a refuzat, spunînd că preferă să asiste *la experiență* pînă la capăt. În 1795, cînd s-a creat Școala Normală, el a funcționat acolo ca profesor și doi ani după aceea a organizat cursurile Școlii Politehnice din Paris, fiindu-i primul profesor. El, cel mai mare matematician al epocii, „cea mai înaltă piramidă a științelor matematice", cum îl numea Napoleon, îndruma acolo cu drag tineretul, pregătind primii ingineri militari ai Franței. Pentru ei a scris atunci tratatele rămase celebre, nu numai prin problemele matematice expuse, cît și prin forma clară și ușor de asimilat în care le-a prezentat.

— Pe lîngă aceasta aş mai adăuga că cea mai importantă contribuţie a sa din timpul revoluţiei rămîne perfecţionarea pe care a adus-o la sistemul de măsuri şi greutăţi. Dar, vă rog să reveniţi la problema noastră.

— În 1821, reia Teodor Solonar, apărea o broşură intitulată *o veche epigramă grecească, cu conţinut matematic, publicată pentru prima oară de Lessing. Editată din nou şi tratată din punct de vedere matematic şi critic de dr J. Struve, directorul gimnaziului din Altona, şi de dr. K. L. Struve, directorul gimnaziului din Königsberg, tată şi fiu. Altona 1821.* Broşura are 47 de pagini şi cuprinde textul original al epigramei, urmat de o traducere a ei în limba germană, vers cu vers. Calculele sînt refăcute de Struve-tatăl, pentru primele 7 condiţii, ultimele două fiind considerate de el ca adăugate posterior. El îşi exprimă părerea că numele lui Arhimede este o invenţie şi chiar se distrează pe această temă, afirmînd că problema trebuie să fi fost scrisă de vreun matematician necunoscut, care s-a inspirat din *Odiseea.* Formulînd problema în hexametri şi pentametri greceşti, dîndu-i numele de *epigramă* şi atribuind-o lui Arhimede, spune Struve, acel matematician rîdea pe înfundate la gîndul că amăgeşte lumea, care se va chinui să dezlege o problemă imposibilă, compusă de el şi pe care nici el n-a putut-o dezlega!

Observaţiile critice sînt formulate de Struve-fiul. El arată că nu înţelege nimic din versurile 35 şi 36, în care se stabileşte condiţia a 8-a a problemei căci cuvîntul grec pe care Leiste l-a tradus prin *pătrat* poate avea şi înţeles de dreptunghi, deoarece se ştie că grecii aveau diferite numiri pentru produsele de doi, trei sau mai mulţi factori, după natura acelor factori. De pildă, dacă cei doi factori erau egali produsul se presupunea că reprezintă aria unui pătrat dar dacă factorii erau diferiţi, produsul determina aria unui dreptunghi, etc.

—Avea dreptate Struve-fiul, a întrerupt tînăra. Grecii reprezentau numerele fie prin segmente geometrice, fie prin suma punctelor legate de un anumit poligon. Acestea sînt numerele pe care le numim *figurate.* Astfel, un număr care se putea descompune în doi factori era numit număr *plan,* fiecare dintre cei doi factori fiind interpretat ca fiind lungimea unui segment dintr-un pătrat sau dreptunghi. Dacă factorii erau egali, numărul se numea *pătrat* şi dacă erau diferiţi numărul se numea *dreptunghi.* Aşadar, cînd se vorbea despre un număr plan, el putea fi pătrat sau dreptunghi

Dacă își imaginau numărul ca o sumă de puncte, atunci vorbeau despre numere triunghiulare, dacă acele puncte prin așezarea lor formau un triunghi, sau pentagonale, ș.a.m.d.

— Am impresia că lucrarea *celor doi Struve* nu a adus nici o contribuție reală la lămurirea misterului, căci afirmația lor cu privire la autor nu se bazează pe nici un document. Eu unul deși nu-s de specialitate, nu pot fi de părerea lui Struve-tatăl. Din contră, aș afirma că problema a fost făcută de către Arhimede, chiar dacă nu în versuri. Și am să vă dovedesc aceasta cu fapte, nu cu vorbe goale — a intervenit atunci tînărul asistent.

— Tu ? Știi că mă surprinde! Habar n-aveam eu de problemă, dar tu? De unde vrei să scoți argumente bazate pe fapte? Crezi că metoda „uite Pell și nu e Pell" se aplică peste tot?

— De loc! Ascultînd atent cele spuse acum, mi-am adus aminte că am găsit, într-o scolie, despre unul din *Dialogurile lui Platon* — mi se pare că era vorba de *Harmide* — ceva în legătură cu *problema boilor* a lui Arhimede. Desigur că despre această problemă trebuie să fi fost vorba acolo, căci boi, tauri, asta n-are importanță!

— Da, domnule! Chiar așa-i a strigat, aplaudîndu-l fericit Teodor Solonar! Peste 7 ani, în 1828, problema a fost reluată de Gottfried Hermann din Leipzig. De data aceasta avem de-a face cu un studiu foarte interesant. Mai întîi, Hermann critică vehement stilul în care Struve își exprima părerea asupra neautenticității problemei, găsindu-l *nedemn de un matematician*. El susținea că problema a fost compusă de Arhimede și nu numai prima parte, ci *mai ales* ultima, singura de fapt care e mai greu de rezolvat. Și el susținea aceasta exact cu argumentul despre care ne-ai vorbit dumneata. În plus el arăta că această problemă este citată, de asemenea, într-o lucrare a lui Heron din Alexandria! El mai afirma că însuși marele Gauss s-a ocupat de această problemă și că ar fi obținut soluția ei completă.

— Mă bucură tot așa de mult această confirmare ca și cînd aș fi găsit o comoară! Acum mi-am amintit și vă pot spune chiar cum suna în grecește expresia cu pricina: „Arhimizu boicôn pròblima",

— Interesant este că lucrarea lui Hermann a fost recenzată chiar în anul următor, dar despre *argumentarea asupra autenticității problemei nu se spune nimic*! Unul dintre recenzenți J. Fr. Wurm, reia problema și o rezolvă în ipo-

teza că versul 36 ar putea fi interpretat așa cum arătase Struve-fiul, adică admițînd că totalitatea taurilor albi și negri ar forma un dreptunghi și nu un pătrat.

— Atunci Wurm consideră că ultimele două ecuații ar fi de forma :

$$A+N=\text{dreptunghi}\,; \tag{8}$$

$$R+B=\frac{n(n+1)}{2} \tag{9}$$

— Atenție, însă! Se pare că matematicienii ne obligă să apucăm iar creionul de coadă! Poftim o hîrtie, să nu ne prindă nepregătiți!

— De ce nu? Ați făcut destulă pauză și nu ne temem că rezultatele nu vor fi interesante! Iată, să considerăm primele 7 ecuații rezolvate și soluțiile date de sistemul (1). După cum se observă, ecuația a 8-a este îndeplinită de la sine, căci

$$A+N=2\cdot 3\cdot 4\,657\cdot(7\cdot 53+3\cdot 89)x$$

Rămîne ecuația a 9-a. Înlocuind valorile lui R și B din (1) avem:

$$\begin{aligned} R+B=\frac{n(n+1)}{2}&=4\,657\cdot x(3^4\cdot 11+2^2\cdot 5\cdot 79)=\\ &=4\,657\cdot 2\,417x=7\cdot 353\cdot 4\,657x \end{aligned} \tag{10}$$

Să observăm că n poate fi un număr pereche sau nepereche, adică de forma $n=2s$, sau $n=2s-1$. Asta înseamnă că ecuația (10) se poate scrie sub forma :

$$s(2s\pm 1)=7\cdot 353\cdot 4\,657x \tag{11}$$

Și, dat fiind că x este un număr oarecare întreg, care nu-i supus nici unui fel de restricții, Wurm are ideea ingenioasă să-l considere exprimat printr-un produs de doi factori, u și v, în așa fel ca u să fie divizibil cu s, iar v cu $(2s\pm 1)$, În acest caz, ecuația (11) conduce la următoarele sisteme de cîte două ecuații liniare, nedeterminate, sau cum se mai numesc încă, diofantice :

1) $s=u\,;\ 2s\pm 1=7\cdot 353\cdot 4\,657v\,;\ 2u\pm 1=7\cdot 353\cdot 4\,657v$

2) $s=7u\,;\ 2s\pm 1=353\cdot 4\,657v\,;\ 14u\pm 1=353\cdot 4\,657v$

3) $s=353u\,;\ 2s\pm 1=7\cdot 4\,657v\,;\ 706u\pm 1=7\cdot 4\,657v$

4) $s=4\,657u$; $2s\pm1=7\cdot353v$; $9314u\pm1=7\cdot353v$

5) $s=7\cdot353u$; $2s\pm1=4\,657v$

6) $s=7\cdot4\,657u$; $2s\pm1=353v$

7) $s=353\cdot4\,657u$; $2s\pm1=7v$

8) $s=7\cdot353\cdot4\,657u$; $2s\pm1=v$

Rezolvînd pe rînd aceste 16 ecuații de gradul întîi cu cîte două necunoscute și comparînd rezultatele, Wurm arată că valorile cele mai mici pentru u și v se găsesc din ecuația :

$$14u-1=357\cdot4\,567v, \text{ din care rezultă } v=1\,;$$

$$u=117\,423=3^3\cdot4\,349, \text{ ceea ce conduce la } x=u\,.\,v==117\,423=3^3\cdot4\,349,$$

de unde urmează

$$s=7u=821\,961\,;\ n=2s-1=1\,643\,921$$

și de aici :

$$R+B=4\,657\cdot2\,471\cdot117\,423=135\,123\,894\,081==\frac{1643921\cdot1643922}{2}.$$

Valoarea găsită pentru x trebuie folosită și în ecuația care dă numărul dreptunghiular $A+N$, adică :

$$A+N=2^2\cdot3\cdot11\cdot29\cdot4\,657\cdot117\,423=$$

$$=2^2\,;\,3^4\cdot4\,349\cdot11\cdot29\cdot4\,657=1\,485\,583\cdot1\,409076.$$

— Bine dar, după cîte observ, cei doi factori sînt aproape egali, adică dreptunghiul este aproape un pătrat!

— Aproape, dar nu un pătrat!

— Folosind mai departe această valoare a lui x, Wurm calculează și numărul total de cornute, găsindu-l egal cu 5916837175686.

— Ar fi interesant de văzut dacă atîtea vite ar putea încăpea pe insulă.

— De aceasta s-a interesat chiar Wurm. Raportînd acest număr la suprafața insulei, care este aproximativ egală cu 136 bilioane m² și presupunînd animalele împrăștiate uniform, stabilește că fiecare vită ar avea un spațiu de 23 m² în jurul ei

— Un rezultat foarte frumos, căci corespunde oarecum și realității geografice. Trebuie să fi plăcut mult, nu-i așa?

— Nu! Deși matematicienii nu au contestat ingeniozitatea lui Wurm, și azi această soluție e numită chiar „problema lui Wurm," rezultatul nu i-a mulțumit. Problema, în forma ei originală, a continuat să preocupe pe matematicieni, de aceea vă mai cer puțină răbdare. Sîntem în 1829 și pînă în 1880, cînd apare soluția dată de Amthor, au să mai treacă 51 de ani! Desigur, 51 de ani nu e mult, o viață de om, așa că se cuvine să facem o pauză ca să ne mai întărim, gustînd cîte ceva și bînd o cafea, și să ne mai dezmorțim cercetînd vremea care, după cîte văd, ține cu noi, cei îndrăgostiți de matematici...

— Orice s-ar mai întîmpla în cei 51 de ani următori — a reînceput tînărul istoric discuția, nu cred că se va mai putea pune la îndoială autenticitatea problemei, deși, după cum am auzit, argumentele aduse de Hermann nu au fost comentate de loc.

— Adevărul a fost stabilit destul de greu — a răspuns prietenul meu. Mai întîi G.H.N.F. Nesselmann, în cartea sa *Algebra la greci*, pe care o publică în 1842, se alătură părerii lui Struve, adăugînd încă următoarele două argumente în favoarea ipotezei lui : 1) partea a doua a problemei nu a putut fi scrisă de Arhimede, deoarece pe vremea lui nu se putea vorbi de numere triunghiulare, iar partea întîia fără cea de-a doua, singura care ar prezenta o anumită greutate, nu ar putea fi atribuită lui Arhimede ; 2) această epigramă nu poate fi datorită lui Arhimede, căci nu se găsește în colecția de epigrame întocmită în veacul al XIV-lea de Planudiu.

— Bine, dar ultimul argument nu-i valabil! E normal să nu pui în colecție un lucru pe care nu-l cunoști! Și e posibil ca această problemă să fi așteptat într-un manuscris uitat în cine știe ce bibliotecă, nedescifrat de nimeni. Cum a dat Lessing de el, altfel decît din întîmplare?

— Foarte adevărat. De altfel, nici primul argument nu-i mai breaz, a spus tînăra cu înflăcărare. Deși grecii nu aveau sistemul nostru de scriere a numerelor, ei cunoșteau foarte bine numerele triunghiulare, încă de pe vremea lui Pitagora. După cum s-a mai amintit azi aici, ei își imaginau numerele întregi ca pe niște grămezi de puncte și le numeau triunghiulare dacă ele puteau fi așezate în formă de triunghi. Așa sînt numerele de forma $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ etc. În aritmetica lui Nicomah, scrisă în primul secol al erei noastre,

găsim chiar o teorie a numerelor poligonale. Mi-ați putea obiecta că s-ar fi putut ca Nesselmann să nu fi cunoscut lucrarea lui Hermann și nici pe acelea ale recenzenților lui. Dar iată că și mai tîrziu, în 1855, găsim alt articol, al cunoscutului matematician A.J.H. Vincent, membru al Academiei Franceze, care, după ce citează părerea lui Struve, adaugă: „...Într-adevăr, această epigramă este complet străină de spiritul lucrărilor care aparțin incontestabil geometrului sicilian".

— E nemaipomenit! Nici Vincent nu a cunoscut lucrarea lui Hermann?

— Ba da, a cunoscut-o însă nu a fost de părerea acestuia. Analizînd problema, el o reduce numai la versurile 1—16 — care cuprind enunțul primelor trei ecuații — și la versurile 27—30, care spune el, îi dau un epilog foarte convenabil. Ca soluții află numerele...

— Dar prin această trunchiere problema poate figura în orice carte de aritmetică de curs elementar și deci nu mai poate fi vorba de o problemă a lui Arhimede...

— Vincent aruncă doar de la început această ipoteză...

— Atunci nici nu mai interesează soluția lui. Preferăm să auzim alte voci!

— Fie, pe voia dv. Iată trei voci puternice, care de data aceasta se alătură la aceea a lui Hermann. Prima, în 1879, este a renumitului profesor din Copenhaga, J. L. Heiberg, în drept să decidă dacă un text ar aparține sau nu lui Arhimede, deoarece el publica în 1880 o nouă ediție a operelor lui Arhimede, însoțite de comentariile pe care le-a scris Eutocios prin veacul al VI-lea.

— Faima lui Heiberg știu că se datorește descoperirii unui nou manuscris al lui Arhimede, *Metoda*, considerat pînă atunci pierdut!

— Da. Dar acea descoperire s-a făcut în 1906. Păstrînd ordinea cronologică am de gînd să vă vorbesc mai tîrziu despre această descoperire interesantă pentru noi.

Acum, în 1879, Heiberg afirma, în teza sa de docență, că părerea lui Hermann cu privire la autorul problemei taurilor era pe deplin justificată. Bineînțeles ca fond, căci forma de *epigramă* în care găsim problema azi, o considera posterioară lui Arhimede. Același lucru îl susținea și dr. Krumbiegel, într-un documentat articol, pe care îl publica în anul următor, împreună cu dr. A. Amthor, primul autor discutînd proble-

mele filologice şi autenticitatea problemei iar ultimul stabilindu-i soluţia generală.

De acord cu ei a fost şi renumitul istoriograf al matematicilor greceşti, Paul Tannery. El stabilea, în 1881, şi sursa folosită de scoliastul lui Platon cu privire la informaţia în legătură cu problema lui Arhimede. Anume, arăta că problema boilor a fost menţionată ca aparţinînd lui Arhimede în lucrările matematicianului grec Geminus din Rodos, care a trăit în a doua jumătate a veacului I î.e.n.

În fine, în traducerea în limba engleză a operelor lui Arhimede, pe care o face T.L. Heath în 1897, a fost introdusă şi problema boilor, considerată în mod definitiv ca aparţinînd lui Arhimede. Şi cu asta eu am terminat povestea.

— Aşa? —m-am răzvrătit eu, întărîtat. Zici că ai *terminat povestea*, fără să ne fi lămurit lucrul cel mai principal, misterul ei? Matematicienii pot fi satisfăcuţi prin calcule şi prin această înşirare cronologică de lucrări, căci din cauza copacilor, ei nu mai văd pădurea. Dar pentru mine şi colegul meu de breaslă, de-abia acum începe problema!

— Într-adevăr — a intervenit acesta. Dacă s-a stabilit că problema a fost compusă de Arhimede, ar fi de dorit să aflăm ce l-a îndemnat să o facă? Căci o problemă care conduce la asemenea calcule ca acelea pe care le-am văzut, e puţin probabil că fi fost inventată aşa, de florile mărului. De ce dar a scris-o, cu ce scop?

—Cu alte cuvinte, văd că problema aceasta a reuşit să vă fie simpatică, nu? Ei bine, dragii mei prieteni, chiar dacă îi mai ocărîţi pe matematicieni, vă mulţumesc că aţi pus această întrebare şi, ca mulţumirea să nu rămînă platonică, vă fac chiar acum nişte cafeluţe fierbinţi ca iadul. Ne este necesară această aprovizionare, căci pentru dezlegarea misterului vom parcurge cale lungă să ne-ajungă, cu vreo 22 de veacuri înapoi, ca să-l găsim pe Arhimede şi să-l întrebăm pe el. Avem noroc că în lumea matematicilor nu există graniţe nici pentru spaţiu şi nici pentru timp.

— Ne va primi oare? Nu ne va răspunde şi nouă „Nu-mi tulburaţi liniştea", ca odinioară acelor soldaţi romani : „Nu vă atingeţi de cercurile mele!—a întrebat sfios tînăra.

— A nu! Sînt sigur că nu va mai răspunde aşa. Noi nu-i mai putem tulbura gîndurile care urmăreau dezlegarea unei probleme, fiindcă problemele ce şi le-a pus el atunci au fost de mult rezolvate. Azi opera lui e admirată chiar şi de cei ce nu o mai citesc în original. Venirea noastră îi va deştepta amin-

tirile și ne va întîmpina cu zîmbetul cald al bunicului înconjurat de nepoții care așteaptă să le spună o poveste.

— Acum, că ne-am băut cafelele, putem porni — a început Teodor Solonar. Să lăsăm aici cerul întunecat și vremea ploioasă și să coborîm în colțul dinspre sud-estul insulei cu trei unghiuri, la Siracuza, încîntătoarea cetate, unde, sub un cer albastru strălucitor, s-a născut și a murit Arhimede. Precis nu se știe cînd s-a născut, se pare că pe la 287 î.e.n.

— În schimb, anul morții se cunoaște cu precizie. Știm cu toții că a fost ucis în anul 212, în al doilea război punic, de un soldat al lui Marcellus.

— Tradiția spune că pe atunci avea 75 de ani, de aceea se admite ca dată a nașterii aceea pe care v-am spus-o.

— Știați că în 1961, între 11 și 16 aprilie, au avut loc la Siracuza serbări în amintirea lui Arhimede?

— O, desigur! Cînd am fost ultima oară la Iași, am găsit în Biblioteca Seminarului Matematic „Alexandru Myller" cel 3 volume ale Simpozionului de geometrie diferențială care s-a ținut acolo cu ocazia acestor serbări. M-a interesat mai ales volumul I, în care s-au tipărit discursurile și conferințele generale ce s-au rostit cu acest prilej. Discursul de deschidere a fost ținut de Paul Montel, și, dacă vreți, aș putea căuta printre hîrțoagele mele ca să vă citesc cîteva din frazele care le-am însemnat acolo.

— Numai dacă nu va dura căutatul mai mult decît am avea noi răbdare să așteptăm! — l-am necăjit eu.

— În privința asta, nici o teamă. Caietul meu de însemnări e aici pe policioară! Iată ce a spus Montel despre Arhimede: „Fascinanta bogăție a facultăților lui inventive i-au permis să evolueze cu aceeași ușurință și putere creatoare în abstract, ca și în concret, în științele de bază, ca și în științele aplicate, să fie savantul care meditează și inginerul care construiește. Aceste calități, pe care le vom regăsi mai tîrziu la un Leonardo da Vinci, s-au întrunit rar în același om, iar în zilele noastre această reuniune e greu de conceput. Pentru Arhimede renumele de tehnician s-a răspîndit mai repede decît acela de savant, pentru că descoperirile lui în concret erau accesibile unui număr mai mare..." Sau, mai departe, unde spune: „Descoperirile lui sînt fructul unei imaginații și al unei intuiții care au depășit secolele și au dat germenii teoriilor care nu s-au dezvoltat deplin decît mult mai tîrziu..." Ei, vă place?

— Desigur, totdeauna îţi face plăcere să asculţi lucruri pe care le ştii şi tu, dacă sînt spuse într-o formă deosebită. Eu mi-aduc aminte cu cîtă admiraţie vorbea Plutarh despre Arhimede, deşi numai în treacăt. El arăta că era un spirit aşa de profund şi de o aşa de mare bogăţie în teorii geometrice, încît n-a vrut să mai scrie nimic despre construcţiile maşinăriilor sale, care-i aduseseră atîta glorie! Însă, dragul meu prieten, parcă era vorba că ne ducem să-l întîlnim pe Arhimede şi nu să asistăm la un congres matematic, fie el chiar în onoarea lui Arhimede şi în Siracuza! Noi o pornisem către Siracuza din veacul al III-lea î.e.n., pe cînd acest oraş era un mic stat monarhic şi unul dintre cele mai cosmopolite oraşe din Grecia..

— Da! Aici cam ai avea dreptate — s-a scuzat Teodor Solonar. Te asigur că mergem într-acolo, dar nu într-o rachetă cosmică, fiindcă nu am putea face nici o escală! Uite însă că am ajuns unde doreai. Familia în care s-a născut Arhimede nu a fost prea bogată. Tatăl lui era astronom, îl chema Fidias şi se ocupa singur de educaţia fiului său.

— Probabil că acesta este motivul care te face să pui la îndoială buna stare materială a părinţilor; oamenii înstăriţi aveau obiceiul să tocmească profesori de filozofie sau literatură pentru copii lor.

— Se spune că Arhimede a fost atras de mic copil numai de studiul matematicii şi al astronomiei, singura lui distracţie fiind invenţiile mecanice.

— Ce distracţie poate întrece pe aceea de a-ţi crea tu însuţi jucăriile pe care alţii nu-s în stare să le mînuiască cum trebuie?

— După cum se vede, în casă există cîte un exemplar din cărţile nu de mult apărute ale lui Euclid, *Elementele* şi *Secţiunile conice*, cărţi care cuprind destul material la care să te gîndeşti pe îndelete. Arhimede nu a părăsit oraşul natal ca să caute învăţătura aiurea decît tîrziu, după ce o rudă de-a familiei lui, Heron, a fost ales de locuitorii oraşului, ca tiran, adică conducător al Siracuzei. De-abia după aceea Arhimede s-a dus la Alexandria ca să-şi desăvîrşească studiile sale.

— Într-adevăr, pe atunci *Muzeul* — cuvîntul este o prescurtare pentru *Templul Muzelor*—era vestit atît prin oamenii de ştiinţă şi problemele care se cercetau acolo, cît şi prin biblioteca, colecţiilor de material ştiinţific sau prin grădinile sale!

— De altfel, Alexandria rivaliza cu Atena, primul centru de cultură al lumii elene, şi o întrecea în ceea ce priveşte

matematica și astronomia. În schimb, Atena era neîntrecută în domeniul literaturii și al filozofiei.

— Și întrucît Arhimede înclina către matematici, e clar că a ales drumul Alexandriei. Acolo a legat prietenie cu doi dintre cei mai mari matematicieni ai vremii : Conon și Eratostene. O știm precis din scrisorile pe care le adresa acestor doi matematicieni, după ce s-a întors în Siracuza.

— Bine, dar atunci problema lui avea o adresă foarte precisă, și nu fictivă. Drept să-ți spun, mă mir că s-a putut pune la îndoială autenticitatea problemei, dacă se cunoșteau toate acestea! — am observat eu, surprins.

— *Dacă se cunoșteau acestea*, bine spus, vorba este că atunci cînd se discuta problema, nu se cunoșteau acestea!

— Ce vrei să spui?

— Exact cele ce ai auzit. Unul dintre argumentele pe care se sprijineau cei ce îi contestau autenticitatea era tocmai acesta: dacă Arhimede a scris scrisori lui Eratostene, de ce nu s-au păstrat și altele, în afară de epigrama cu pricina, așa după cum au rămas scrisorile adresate de el lui Conon sau Dositeu ?

— Ar fi foarte interesant să cunoaștem aceste scrisori mai îndeaproape.

— Nimic mai simplu. Iată, de pildă, scrisoarea care se află ca prefață în cartea sa despre *Cuadratura parabolei* : „Arhimede îi urează sănătate lui Dositeu. Aflînd că prietenul meu Conon a murit și că tu, ca și mine, îi erai apropiat și, afară de aceasta, aflînd că ești un cunoscător al geometriei cu toată durerea care mi-a pricinuit-o pierderea unui amic și a unui excepțional matematician, am hotărît să-ți trimit scrisoarea pe care intenționam să i-o trimit lui Conon, comunicîndu-ți o teoremă de geometrie..." O altă scrisoare, tot către Dositeu, însoțea și cartea *Despre sferă și cilindru* și, în fine, o a treia se află într-o lucrare unde-i vorba despre o curbă care se numește azi „spirala lui Arhimede" ; cartea are ca titlu *Despre spirale*.

— Dați-mi voie să vă corectez : titlul acestei cărți este : *Despre elice*, și nu despre spirale, căci aceste curbe pe care noi le numim *spirale*, Arhimede le numea elice.

— Aveți dreptate. N-am folosit termenul de atunci, căci pentru noi elicea este curba șurubului, adică alta decît spirala.

— Atunci vă rog să continuați a ne citi din scrisorile lui.

— „Arhimede îi dorește sănătate lui Dositeu. Cea mai mare parte dintre teoremele pe care le-am trimis lui Conon,

ale căror demonstrații mă rogi în fiecare scrisoare să ți le comunic au fost demonstrate în lucrările mele, pe care ți le-a adus Heraclit... ; și să nu te miri că am întîrziat atît de mult cu publicarea acestor demonstrații. Am vrut mai întîi să comunic aceste teoreme oamenilor care se ocupă cu matematica și care ar fi vrut să încerce să le demonstreze singuri. Foarte multe dintre aceste teoreme geometrice, care, la prima vedere, par extrem de dificile, se pot rezolva pînă la urmă cu succes. Conon a murit însă înainte de a fi putut să-și facă timp pentru a se ocupa de aceste teoreme. Dacă n-ar fi survenit moartea, el ar fi găsit cu siguranță rezolvarea tuturor problemelor... S-au scurs mulți ani de la moartea lui Conon și încă n-am auzit ca cineva să se fi apucat de rezolvarea vreuneia dintre aceste probleme. De aceea voi enumera aici, pe rînd, toate teoremele propuse de mine lui Conon, și în special două dintre ele, care m-au dus la o concluzie falsă ; fie ca această întîmplare să constituie un exemplu și un avertisment pentru oamenii care afirmă că pot soluționa orice problemă pe care o propun spre rezolvare altora, fără să o însoțească de propria lor soluție ; iar în cele din urmă sînt nevoiți să admită că au încercat să demonstreze imposibilul". În această scrisoare el arată mai departe care este enunțul și soluția corectă a celor două teoreme false.

— Curioasă de tot această atitudine a lui Arhimede!

— Da, și e bine să o reținem, căci am putea găsi aici o urmă care să ne ducă la rezolvarea misterului! Însă înainte de a vorbi despre aceasta, trebuie să vă spun că în anul 1906, adică mult după ce misterul autenticității fusese lămurit, s-au descoperit și scrisori trimise de Arhimede lui Eratostene. Una se găsește în prefața la o carte ce se considera pierdută : *Despre metoda demonstrării teoremelor cu ajutorul mecanicii.* Această scrisoare începe cu salutul obișnuit : „Arhimede îi urează sănătate lui Eratostene. Ți-am trimis mai înainte cîteva dintre teoremele găsite de mine, comunicîndu-ți numai concluziile și propunîndu-ți să găsești singur demonstrațiile..." Dacă e dovedit că Arhimede l-a cunoscut pe Eratostene, se poate trage și o concluzie asupra vîrstei pe care a avut-o cînd s-a dus la Alexandria, Se pare că Eratostene din Cirene era de-o vîrstă cu Arhimede și se știe că el a devenit astronom la curtea lui Ptolemeu al III-lea, fiind chemat în anul 245 din Atena ca profesor pentru fiul lui și moștenitorul tronului. Așadar scăzînd din 287 pe 245, rămîn 42 de ani.

— Atunci Arhimede nu a fost elevul școlii din Alexandria.

— Asta cred că nu, dar el a studiat acolo, căci oricînd, la orice vîrstă și cu orice bagaj de cunoștințe poți merge ca să studiezi într-un centru în care știi că vei găsi atît materialul științific de care ai nevoie, cît și oamenii care lucrează în aceeași direcție. Așa se explică și faptul că Arhimede a legat prietenie cu acești doi savanți și că le propunea lor spre demonstrare enunțul teoremelor pe care le stabilea. Era și atunci obiceiul matematicienilor de a-și comunica descoperirile lor prin scrisori, așa cum îl regăsim din nou în secolele al XVII-lea și al XVIII-lea.

— M-ar interesa să aflu cum s-a descoperit ultima lucrare a lui Arhimede? Nu a fost, cumva, întîmplător?

— Desigur asemenea descoperiri au de obicei acest caracter. Ceea ce-i mai nostim e că a fost găsită într-un palimpsest.

— Vrei să spui că lucrarea lui Arhimede a fost scrisă pe un pergament pe care fusese scris mai înainte un alt text și acesta a fost șters ca să fie transcrisă *Metoda*?

— Din contră! Pergamentul pe care fusese scrisă cartea lui Arhimede a fost spălat de către un călugăr grec, ca să scrie pe deasupra lui un text liturgic!

— Dar atunci cum s-a mai putut descoperi vechiul text?

— Tocmai aceasta-i nostim! Textul liturgic, scris prin veacul al XIII-lea se află în biblioteca unei mănăstiri din Constantinopol. Un savant cercetător care a întocmit catalogul manuscriselor a băgat de seamă că sub noul text se mai putea descifra destul de bine cel inițial, deoarece pergamentul fusese spălat foarte superficial. În catalog el a reprodus și un extras din textul matematic inițial, despre care nu putea spune nimic, nefiind specialist.

— Într-adevăr, foarte nostim! Ori călugărul a fost cam leneș, ori i-a părut rău că trebuie să distrugă un text antic, pe care-l prețuia! În 1906, prof. J.L. Heiberg din Copenhaga, unul dintre cei mai serioși cercetători ai istoriei matematicilor și care, după cum am văzut, cunoștea îndeaproape opera lui Arhimede, făcînd o călătorie la Constantinopol și cercetînd acest catalog, a recunoscut imediat că textul aparține lui Arhimede. El a cerut permisiunea să-l reconstituiască și peste un an publică, aproape în întregime, textul reconstituit. S-a stabilit astfel că multe părți din text erau lucrări cunoscute, dar printre acestea a găsit și o foarte importantă operă necunoscută a lui Arhimede, *Metoda*, în care se afla și scrisoarea către Eratostene.

— Cred că printre subiectele discutate de Arhimede și Eratostene trebuie să fi fost multe din teoria numerelor. Cine n-a auzit de *ciurul lui Eratostene*, am observat eu.

— Cum cine. *Eu*, soțul unei matematiciene! O declar aici în fața dv. că habar n-am de acest ciur. Probabil că nu are legătură cu ecuația lui Pell! Totuși n-aș vrea să insinuez că ea nu ar cunoaște problema...

— Vedeți? Iar începe! Vă rog deci să mă lăsați pe mine să-i explic ce este cu ciurul lui Eratostene, căci altfel s-ar îndoi că știu despre ce e vorba! Încă de pe vremea lui Pitagora matematicienii greci au împărțit numerele în prime și neprime. Dar nu se știa cum s-ar putea stabili dinainte dacă un număr e prim sau nu, așa după cum se constată dacă un număr este par sau impar...

— Și Eratostene a construit un ciur prin care a cernut numerele?

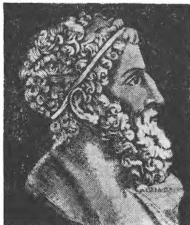
— Da, dragul meu. Probabil ca să vadă dacă n-ar putea observa vreo regularitate în distribuția lor. El a scris toate numerele, de la 1 pînă la 1 000, în șiruri regulate și unele sub altele, pe un papirus. Ca acesta să stea întins și să nu se necăjească să-l dezdoaie de cîte ori s-ar face sul, l-a fixat într-un cadru de lemn. Apoi a găurit papirusul, tăind rotocoale în locurile unde se aflau numerele neprime; cînd a terminat operația, acea tabelă părea un ciur prin care se cernuseră numerele neprime. Se vede că imaginea aceasta a plăcut foarte mult, căci de atunci și pînă azi, tabela numerelor prime de la 1 la 1 000, deși nu se mai perforează, poartă numele de *ciurul lui Eratostene*.

— Cum de n-a găsit o metodă mai expeditivă?

— Era singura metodă, pe care a putut-o folosi atunci și a rămas singura metodă care se folosește și azi ca să aflăm dacă un număr este prim sau nu. Ei, ești mulțumit, se poate continua?

— Acum da, și îl rog pe domnul Solonar să ne conducă pe urmele lui Arhimede.

— Reîntors la Siracuza, a reluat prietenul meu, Arhimede a avut condițiile necesare ca să se dedice atît problemelor de matematică teoretică, cît și acelora de aplicații practice necesare ca să-l ajute pe Heron să-și întocmească o apărare față de posibilitățile unui eventual atac din partea romanilor. Dar acele realizări nu le vom urmări acum. Ne mărginim să-l căutăm numai printre problemele legate de sistemul de numerație. După cum se știe foarte bine, la baza gîndirii matematice grecești se află noțiunea de număr



Arhimede

întreg. Pitagoreicii erau așa de încîntați de proprietățile numerelor întregi, încît au fost tentați să atribuie, unora dintre ele, chiar un sens mistic.

— Așa-i numai că mistica numerelor întregi a suferit o grea lovitură tot în școala lui Pitagora, atunci cînd tot ei au descoperit numărul irațional, care nu se mai putea exprima prin raportul dintre două numere întregi, a observat prietena noastră.

— Totuși, cu toată subtilitatea raționamentului lor, grecii n-au ajuns, așa cum au făcut-o hindușii, la un sistem de numerație care să fie comod atît pentru cercetările teoretice, cît și pentru calculul practic — a continuat Teodor Solonar.

— Poate fiindcă grecii au separat problemele teoretice de cele practice. În *Cărțile* a VII-a, a VIII-a și a IX-a din *Elemente*, în care Euclid se ocupă de aritmetică, nu găsim rezolvată nici o problemă numerică, nu se efectuează nici un calcul cu numere. Metodele de socotit formau un obiect aparte, numit logistică, și în acest scop se foloseau abacele. Euclid nu arată cum se fac operațiile numerice.

— Aveți dreptate, doamnă! Și ca să înțelegem ușor care a fost contribuția lui Arhimede la problema numerației, să vedem mai întîi cum scriau numerele vechii greci.
Ei au folosit în loc de cifre, literele alfabetului la care au mai adăugat trei litere din alfabetul fenician, 27 de semne, fiind destule pentru notarea numerelor de la 1 pînă la 999 ; primele 9 litere reprezentau cifrele numerelor de la 1 pînă la 9, următoarele 9 reprezentau zecile, iar ultimele 9 sutele.

De pildă : numărul 529 se scria astfel: $\varphi k \theta$, fiindcă $\varphi = 500$, $k = 20$ și $\theta = 9$. După cum se vede, deși sistemul lor de numerație era zecimal, scrierea numerelor se deosebea fundamental de a noastră, fiindcă grecii nu foloseau aceleași semne pentru notarea unităților, zecilor sau a sutelor. Cu sistemul pozițional, noi putem scrie un număr oricît de mare numai cu 10 semne, pe cînd ei, cu 27 de semne, nu puteau scrie decît un număr pînă la 999. Sistemul lor de juxtapunere cerea mereu semne noi și cu cît numărul era mai mare cu atît aveau nevoie de mai multe semne ca să-l poată scrie.

— Aceasta nu-i cu putință și, chiar de-ar fi, puțini oameni ar putea să-l folosească!

— Tocmai din cauza aceasta, semnele sistemului lor de numerație s-au oprit la 999. Pentru mii nu au mai introdus semne noi, ci au folosit aceleași litere ca pentru unități, la care le-au adăugat o virgulă înainte. Așadar, β reprezenta numărul 2, dar cu o virgulă înainte : $,\beta = 2\,000$.

— Se menționează în literatură că pe vremea lui Homer grecii numărau numai pînă la 1 000. Cuvîntul miriadă, în grecește *mirioi*, însemna atunci un număr nedefinit de mare, am adăugat eu.

— Exact! Mult mai tîrziu au definit ei *miriada* ca avînd 10 000 de unități. Pe aceasta au notat-o cu inițiala cuvîntului *M*, pe care au așezat-o fie înaintea literelor care arăta numărul, fie sub ele.

Astfel,

$$\overset{\gamma}{M},\delta\rho\nu\gamma = 34\,153, \text{ fiindcă } \overset{\gamma}{M} = 30\;000\;;$$

$$,\delta = 4\,000\;;\; \rho = 100\;,\; \nu = 50 \text{ și } \gamma = 3$$

Cu acest semn grecii au putut scrie orice număr *pînă la* 99 999 999, o miriadă de miriade, sau, cum spunemnoi, o sută de milioane, număr pe care însă nu-l puteau scrie, deși îl pronunțau. Aceasta era situația în care se afla problema numerației pe vremea lu Arhimede. Se cauta o posibilitate de a scrie și citi numerele mari. Arhimede a dat o soluție în cartea pe care a numit-o *Psammit* sau *Numărarea firelor de nisip*. Dar cred că ar fi mai bine să-l lăsăm pe el însuși să ne vorbească și nouă, așa cum i-a vorbit lui Gelon, regele Siracuzei și urmașului său Heron, în cartea despre care am amintit : „Există oameni, o, rege Gelon, care cred că numărul firelor de nisip este nesfîrșit de mare. Nu mă refer la nisipul care este în jurul Siracuzei și e răspîndit în Sicilia întreagă, ci chiar

la acel care se află nu numai în ţinuturile locuite, ci şi în acelea nelocuite. Alţii cred că numărul firelor de nisip nu-i infinit de mare dar că-i imposibil să-ţi imaginezi un număr mai mare. Dacă acei ce gîndesc aşa şi-ar închipui un volum de nisip care ar fi egal cu acela al pămîntului, care ar umple toate golurile sale şi adînciturile mărilor şi care s-ar ridica pînă în vîrful celor mai înalţi munţi, e evident că ar fi şi mai puţin dispuşi să creadă că ar putea exista un număr care să depăşească pe acela al firelor de nisip. Cît despre mine, voi arăta prin demonstraţii geometrice, pe care tu nu vei putea să nu le accepţi, că printre numerele numite de noi în cărţile pe care le-am adresat lui Zeuxippe, există unele care întrec numărul firelor dintr-un volum de nisip egal nu numai cu acela al volumului pămîntului, ci încă cu al Universului."

— Cum aşa? Pe vremea lui Arhimede oamenii credeau că nu există un număr mai mare?—a întrebat asistentul de la istorie.

— Da. Erau unii care credeau aşa, iar alţii că este imposibil să treci o *anumită* limită, de pildă aceea a numărului firelor de nisip de pe ţărmul mării.

— De fapt, era normal să fie aşa, o dată ce nu existau nici numiri şi nici semne pentru scrierea numerelor mai mari de 10^8, adică o miriadă de miriade!—a întărit musafira noastră.

— 10^8 este o notaţie şi o numire modernă — a precizat Teodor Solonar — căci grecii nu aveau notaţia exponenţială pentru puterile unui număr şi nu cunoşteau regulile de operaţii cu exponenţi. Acestea le-a decoperit Arhimede. Ascultaţi cît de limpede o spune el însuşi, după ce, în cartea despre care v-am vorbit, arată procedeul prin care poate determina atît volumul sferei ce ar cuprinde universul conceput de el, cît şi pe acela al unui fir de nisip: „Acum cred că-i necesar să vorbesc despre numirile numerelor. Dacă n-aş spune nimic în această carte, mă tem să nu-i încurc pe acei ce nu au citit cartea pe care am adresat-o lui Zeuxippe. S-au dat nume numerelor pînă la o miriadă şi dincolo de miriadă; numele ce s-au dat numerelor sînt destul de cunoscute, căci nu se face alta decît se repetă o miriadă pînă la zece mii de miriade. Numerele despre care vom vorbi şi care merg pînă la o miriadă de miriade să le numim *primele numere* şi să considerăm *o miriadă de miriade de unităţi ale primelor numere ca unităţi de numere secunde*; să numărăm cu aceste unităţi şi cu zecile, sutele miile şi miriadele acestor unităţi pînă la o miriadă

de miriade. Să spunem că *o miriadă de miriade de numere secunde este o unitate a numerelor terțe*; să numărăm cu aceste unități, cu zecile, sutele, miile și miriadele acestor noi unități pînă la o miriadă de miriade : *o miriadă de miriade de numere terțe să se numească unitate de ordinul al patrulea* și să continuăm să dăm nume la numerele următoare pînă la o miriadă de miriade de numere compuse dintr-o miriadă de miriade de numere..."

— Te rog să te oprești! — am spus, simțind parcă deodată o amețeală. Ție, care ai citit aceste lucrări de mai multe ori și le-ai copiat pe hîrtie, îți par foarte clare. Desigur că și dumneavoastră, doamnă dar mie nu! Cred că același lucru îl va afirma și colegul meu. Aș vrea să traducem acum cele spuse de Arhimede în limbajul nostru și, abia după ce voi înțelege despre ce-i vorba, poți trece mai departe!

— Bine, să facem — a oftat cu încîntare prietenul Teodor. O miriadă $= 10\,000$ sau 10^4; o miriadă de miriade $= 10\,000^2 = 10^8$. Aceasta este o *octantă*, cum va spune Arhimede mai departe. Ea formează unitatea numerelor secunde. Cu această unitate el numără pînă la 10^8. Înseamnă că ajunge pînă la $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ (adică $10^{2 \cdot 8}$) care se consideră ca unitate a numerelor terțe sau, cum le-am spune noi, a numerelor de ordinul al treilea. În general, deci $10^{m \cdot 8}$ va reprezenta unitatea numerelor de ordinul $(m+1)$.

— Bine, dar mi-ai spus că Arhimede nu cunoștea notația exponențială. Atunci cum a numit o miriadă de miriade o *octantă*?

— Habar n-am ! Știu atît cît spune el, restul ia-l de bun așa cum îl auzi!

— Slab răspuns! Nu-mi rămîne decît să văd cum aș scrie ultima unitate, aceea a ordinului miriadelor de miriade! Trebuie să aibe forma $10^{8 \cdot 10^{8-1}}$, iar numărul ce urmează ultimului număr din această clasă se va scrie $10^{8 \cdot 10^8}$. Fantastic! Un număr pe care-l poți scrie, dar nu și imagina! Totuși lucrurile s-au mai limpezit și poți continua!

— Mulțumesc de îngăduință. Iată, dar, cum urmează Arhimede : „Cu toate că acest mare număr de numere cunoscute ar fi cu siguranță mai mult decît suficient, se poate totuși merge mai departe. Într-adevăr, să numim numerele despre care am vorbit *numere din prima perioadă*, iar ultimul număr din perioadă să-l numim *unitatea numerelor prime* din perioada a doua. Tot așa, o miriadă de miriade a primelor numere din perioada a doua să o numim unitate de ordinul al doilea din

a doua perioadă... și să continuăm a da nume numerelor următoare pînă la numărul din a doua perioadă care ar fi egal cu o miriadă de miriade de numere compuse din miriade de miriade".

— Oprește-te, să socotim!

— Lasă-mă că dacă mă vei întrerupe așa după fiecare perioadă pe care o propunea Arhimede, vor trebui cîteva vieți pentru calculele tale. Să termin întîi, că nu mai am mult, și apoi ai să te lămurești. Dv. sînteți de acord cu mine, sau vă asociați cu rebelul meu prieten?

— Și noi și dumnealui vă rugăm să continuați.

— „Mai mult, ultimul număr din perioada a doua să fie numit unitatea primelor numere din perioada a treia și să continuăm a da nume tuturor numerelor pînă la o miriadă de miriade, care fac parte din perioada formată dintr-un miriad de miriade de numere de miriade de miriade". Ne oprim căci aici se termină și prezentarea sistemului de numerație propus de Arhimede, deși de aici înainte urmează partea cea mai interesantă a cărții.

— Cred. Dar ne consolează faptul că în lumea asta sînt foarte multe lucruri extraordinar de interesante, numai că bietul om nu le poate cuprinde pe toate nici măcar în gînd. Urmînd de unde am rămas, înseamnă că numerele din perioada a doua încep cu $10^{8 \cdot 10^8}$ cele din perioada a treia cu $10^{2 \cdot 8 \cdot 10^8}$. iar ultimul număr în fața căruia se oprește Arhimede este acela din ultima perioadă a miriadelor de miriade, care se va scrie $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$ adică 1 urmat de optzeci de cuatralioane de zerouri!

— Număr pe care nici măcar nu ți-l poți imagina, fiindcă mi-ai spus că nu-ți poți imagina nici pe $10^{8 \cdot 10^8}$. E. Kolman a calculat însă lungimea acestui număr, dacă cifrele sale ar fi scrise unele lîngă altele așa de strîns ca fiecare zero să aibă numai lățimea de un milimetru! În această ipoteză a arătat că pentru a-l scrie ar trebui o întindere care să depășească de 500 de ori distanța Pămînt-Soare!

— Dar numărul firelor de nisip? A calculat într-adevăr Arhimede cît e de mare? — am întrebat eu curios.

— A, da, el se află printre numerele din prima perioadă și anume, după cum spune Arhimede, „este mai mic decît o mie de miriade de unități a numerelor de ordinul al 8-lea", adică este mai mic decît $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8} = 10^{63}$.

— Așadar, iată încă un argument care pledează pentru teza autenticității problemei taurilor, domnule Solonar:

Arhimede își crease numerele cu care să jongleze în această problemă! Întrebarea este dacă se mai găsea cineva — nu îndrăznesc să mă gîndesc că ar fi putut exista prea mulți — care să poată mînui numerele mari, fiindcă altfel problema risca să rămînă fără răspuns!

— Fără răspuns a rămas ea atunci oricum, dar de găsit se mai găseau și alții atinși de delirul numerelor mari. Mai întîi de toate era Apolloniu din Perga, savant renumit care se impusese lumii matematice prin cele opt cărți asupra secțiunilor conice; se pare că a trăit între 260 și 200 î.e.n. El a stat multă vreme în Alexandria și, după cum o spune singur în prefața la *Cartea* I a secțiunilor conice, a cunoscut corespondența lui Conon. Din Alexandria, Apolloniu a fost chemat la curtea regelui Attalos din Perga. Acolo a petrecut vreme îndelungată în tovărășia altor matematicieni. Dar între Arhimede și Apolloniu, mai tînăr decît Arhimede cu vreo 20 de ani, nu au existat, pare-se, raporturi de prietenie, ci tocmai contrare Vrajba s-a încins, așa cum se întîmplă de multe ori, ațîțată de zelul prietenilor, atunci cînd au apărut cărțile lui Apolloniu despre *Secțiunile conice*. Arhimede scrisese și el despre secțiunile conice înaintea lui Apolloniu și, cînd a apărut lucrarea lui Apolloniu, aceștia l-au acuzat că l-a plagiat pe Arhimede. Injuria era neîntemeiată, căci Apolloniu a declarat în prefața cărților sale că el nu a urmărit alta decît să sistematizeze și să generalizeze toate descoperirile făcute anterior. Se pare că Apolloniu nu a uitat această jignire și nici nu a iertat-o. De aceea, atunci cînd au apărut cărțile lui Arhimede *Despre măsurarea cercului* și *Despre denumirea numerelor*, Apolloniu le-a răspuns printr-o lucrare intitulată batjocoritor *Okitókion* (Nașteri rapide). Lucrarea aceasta este astăzi pierdută. Ea e cunoscută doar din comentariile lui Eutocius asupra operelor lui Arhimede. Eutocius observa că Appoloniu stabilea și un mijloc mai precis decît al lui Arhimede pentru calcularea valorii aproximative a numărului π cu patru și nu cu două zecimale exacte, iar în legătură cu problema numerației Apolloniu opune metodei octantelor, imaginată de Arhimede, un sistem de numerație mai comod cu miriade. Acest nou sistem nu se deosebește de al nostru decît prin aceea că în fiecare clasă sînt patru ordine (unități, zeci, sute și mii), în loc de trei. Aici zecile de mii sînt unitățile de ordinul întîi din clasa imediat următoare, pe cînd în sistemul actual miile sînt unitățile clasei superioare. În acest sistem, miriada de miriade, adică octanta lui Arhimede, este numită miriadă dublă, iar $10\,000^3$ — miriadă triplă ş.a.m.d.

— Extraordinar! Acum bănuiesc care-i dezlegarea misterului problemei taurilor! —am exclamat fără să vreau.

— Într-adevăr, aveți dreptate — mi-a răspuns tînărul prieten, încercînd o mină de om necăjit. Dumnealor discută acum numai între ei, de parcă noi am fi cu totul străini de problemă!

La această observație am rîs satisfăcut, iar mucalitul meu prieten a adăugat:

— Totuși , să știți că nu vă las ultimul cuvînt! Așa că vă mai citesc ceva. Iată ce viu și plastic și-l imaginează S.I. Lurie, în cartea pe care a scris-o despre Arhimede, pe autorul problemei taurilor cînd i-a trimis problema lui Eratostene, ca o provocare față de Apolloniu : „Credeai că ai să mă întreci în arta numerației? Ceea ce ai făcut în *Okitókion* nu reprezintă adevărata înțelepciune! Încearcă să rezolvi problema propusă de mine și atunci voi recunoaște că ești învingător!"

Replica ne-a plăcut mult și toți trei ne-am arătat satisfăcuți prin mulțumirile adresate prietenului meu, ceea ce l-a pus în încurcătură.

— Priviți, deasupra Runcului cerul s-a înseninat, a spus, fericit că a găsit un divertisment.

— Era și natural—l-a ajutat colega lui. Minunîndu-se de sîrguința noastră, norii au vrut să ne aplaude, dar, cînd au încercat să o facă, s-au risipit!

— Ce-ar fi să o luăm într-acolo?—a propus prietenul Teodor. V-aș arăta eu pe unde alergam după veverițe, cînd m-a adus tata aici la liceu.

— Încaltea să ne spui și cum te-a urechiat profesorul tău de latină din cauza lor!

— Nu era ora de latină, ci cea de greacă. Și, după cum vezi, plătesc acum ceea ce i-am rămas dator atunci, cînd din cauza unei veverițe cu ochișorii speriosi și cu coada zbîrlită, nu-mi învățasem paradigmele!

PROBLEMA NUMERELOR PRIETENE ȘI ALE ALTOR ȘIRURI DE NUMERE ÎNTREGI

Cînd am primit scrisoarea pe care mi-a trimis-o prietenul meu Teodor Solonar, am înțeles că-i bolnav și am plecat imediat la Cîmpulung. Slăbise mult, avea o paloare care nu mi-a plăcut, dar nu-și pierduse prospețimea sufletească și nici buna lui dispoziție.

— Bine, măi Toa, i-am spus după ce ne-am băut cafelele, de ce nu mai zăbovești și tu în pat, așa cum îi plăcea lui Descartes să o facă? De ce umbli, fără noimă, de ici pînă colo, dacă vezi că nu ți-e bine?

— Poate fiindcă nu vreau să mor în pat!

— Las' că încă nu ți-e nasul de moarte!

— Asta n-o știe nimeni, da' oricum, aruncă omul și cîte o vorbuliță mai anapoda atunci cînd îi sîcîit de cel mai bun prieten al lui.

— Din vorbulițele tale înțeleg că habar n-ai ce înseamnă *prietenia*, așa că te sfătuiesc să citești *De amicitia* lui Cicero!

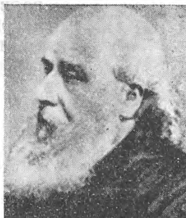
— Ba să am iertare, ca și Cicero consider că „prietenia înseamnă acordul perfect în toate problemele omenești". Așadar, mai meditează tu la Cicero și privește starea mea de acum, cu aceeași indiferență ca și mine, cu alte cuvinte fii „un alt eu", ca să folosec formula lui Pitagora.

— Eu credeam că expresia aceasta, *alter ego*, devenită proverbială de cînd a folosit-o Cicero, a inventat-o Ennius și nu Pitagora.

— Pitagora a trăit cu cel puțin trei secole înaintea lui Ennius așa că nu a putut-o lua el de la Ennius. Dar ce rost ar avea să ne certăm din această pricină cînd toți cîți au scris despre prietenie, Platon în *Lysis*, Aristotel în *Etica nicomahică*, Plutarh, Montaigne și atîția alții din timpurile noastre, oricît de meșteșugite le-au fost vorbele tot n-au mai adăugat nimic peste lapidarul *alter ego* ; de pildă, ce spune mai mult Emerson, în eseul lui *Despre prietenie*, cînd arată că: „singura cale ca să ai un prieten este ca tu însuți să fii unul"?



Arthur Cayley



James Sylvester

Drept răspuns l-am întrebat:

— Ce-ar fi dacă, urmînd cărarea pe care ai apucat-o, te-ai opri pe domeniile matale şi mi-ai prezenta *numerele prietene*? De atîtea ori mi-ai tot promis că ai să o faci!

Teodor Solonar m-a privit lung, nuanţa verzuie a ochilor lui sclipea sub sprîncenele-i castanii, stufoase. Am crezut că va încerca să amîne iar această discuţie, dar el s-a îndreptat înspre dulapul cu cărţi, a luat un caiet şi după ce l-a pus pe masă mi-a spus:

— Cicero a scris *De amicitia* fiindcă i-a cerut prietenul lui, Atticus, eu am scris *Despre numerele prietene*, chiar mai înainte de a mi-o fi cerut tu. Iată dovada.

— Nu-mi venea să cred, gestul mă răscolise, dar ca să nu se observe l-am înfruntat:

— Mare hoţoman mai eşti! Matale te-ai pregătit pe-ndelete şi eu mă minunam de cele ce-ţi ieşeau din gură! Mă tem că dacă te lăsam să continui m-ai fi înşirat pe nerăsuflate şi cîteva perechi de prieteni celebri!

— Cred şi eu! Ascultă! Ahile şi Patrocle, Teseu şi Piritus, Oreste şi Pilade. Asta din mitologie şi dacă ai uitat poveştile lor, sînt gata să ţi le împrospătez. Acum las la o parte alte perechi celebre ca să-ţi prezint numai o pereche de matematicieni Arthur Cayley şi James Joseph Sylvester, despre care tare mi-ar face plăcere să-ţi vorbesc odată, altădată!

— Recunoaşte deci că m-ai tras pe sfoară!

— Nici vorbă de așa ceva. Am fost silit de împrejurări!

— Lasă gluma și spune-mi serios de ce te-ai hotărît să alegi acest subiect?

— Îți jur că niciodată n-am vorbit mai serios ca acum! Am fost silit de împrejurări și dacă nu mă crezi, iată faptele: Acum vreo cîteva săptămîni, m-am pomenit cu un cunoscut de-al meu care a venit să mă întrebe, ce știu eu despre numărul 220? Am bănuit îndată despre ce putea fi vorba, dar eram curios să aflu cum a ajuns el, avocat de meserie, la acest număr și l-am întrebat. Drept care m-a privit pe deasupra ochelarilor, a scos o hîrtie din buzunar și mi-a spus:

— Ascultă aici ce am citit într-un roman a cărui acțiune se petrece în Evul Mediu: Ca să-și asigure protecția unui senior ce-l dușmănea, un cavaler a trimis acestuia un dar foarte curios fiindcă l-a potrivit în așa fel ca să cuprindă exact 220, de bucăți. Anume, saci de grîu, de poame uscate, vase de vin de ulei, oi, porci și la acestea a adăugat o pungă de bani, atîția la număr cît mai era nevoie ca împreună cu numărul celorlalte bunuri să ajungă la 220. Trucul i-a reușit, iar autorul romanului comentează această preferință a cavalerului, arătînd că numărul 220 era unul din perechea 220, 284, numită *numere prietene*, fiindcă fiecare dintre numere este astfel alcătuit încît părțile unuia îl formează, prin adunare, pe celălalt! După cum știi, eu n-am dus niciodată casă bună cu matematicile și am venit să-mi dai o mînă de ajutor, fiindcă ți-a mers buhul în tîrgul nostru, că nimeni nu te-ar întrece în această direcție! Te-aș ruga să mă lămurești căci mie nu-mi pare deloc logic, ca părțile unui număr — de pildă 220 — să dea prin adunare un număr mai mare decît el, adică 284 și nici că ar fi cu putință ca părțile lui 284 să micșoreze numărul, făcîndu-l egal cu 220!

— Ei, așa mai vii de-acasă — l-am întrerupt pe Teodor Solonar care se străduia să fie cît se poate de serios. Lucrarea ta îi este dedicată lui! Sînt chiar foarte curios să aflu cum l-ai ademenit pe stimatul avocat să dea tîrcoale matematicilor? Îmi pare tare rău că nu am fost și eu de față!

— Nu regreta nimic, fiindcă am să-ți redau cu fidelitate convorbirea dintre noi. Mai întîi m-am încredințat că pentru el numerele nu însemnau altceva decît un mijloc de a stabili relațiile financiare, buget, economie... A trebuit să încep a-i prezenta și o altă față a lor. I-am arătat că există *numere prime* și *numere compuse*, că, de exemplu, numerele 3 sau 5 sau 7 sînt prime fiindcă nu se împart decît cu ele însele sau cu

unu, care de altfel împarte toate numerele, pe cînd 6 sau 30 sînt numere compuse, fiindcă au și alți divizori, căci $6=2 \cdot 3$ iar $30=2 \cdot 3 \cdot 5$. I-am atras apoi atenția că aceste numere, 6, 30 și celelalte de acest fel, se prezintă ca un produs de factori primi, că 6 are ca factori primi pe 2 și pe 3 și așa mai departe. Lucrurile păreau să meargă destul de bine și de aceea am atacat îndată miezul problemei, adică l-am pus să-l descompună pe 220 în factori primi. A făcut-o, dar cînd a constatat că ei sînt 2, 2, 5 și 11 mi s-a înfundat. Numai ce-l văd că-și șterge ochelarii, se scarpină în cap și-mi spune:

— Bine, profesorașule, parcă era vorba să-mi dovedești că părțile lui 220 fac 284 și nu $2+2+5+11$ adică 20!

— Pariez că, luat așa prin surprindere, ai tăcut chitic, nu-i așa? —l-am întrebat amuzat la culme de cele ce-mi povestea.

— Da, a spus Teodor Solonar. Nu înțelegeam ce l-a apucat! Schimbase și tonul și era așa de satisfăcut că m-a prins cu ocaua mică, încît dintr-odată, am înțeles că puteam dezumfla balonul cu o înțepătură de ac, mi s-a făcut milă de el, și n-am făcut-o. Mi-am cerut scuze că nu i-am atras atenția asupra deosebirii ce există între factorii primi ai unui număr și divizorii lui, care se mai numesc și *părțile lui alicote*, că divizorii unui număr nu sînt numai factorii lui primi, ci și produsele formate de aceștia. I-am arătat că la aceste părți făcea aluzie comentatorul și că tocmai într-acolo aveam de gînd să-l îndrept cînd a intervenit el cu observația aceea oarecum pripită. Reluînd calculele, am adăugat și pe unu printre factorii primi și atunci a putut constata că, într-adevăr, prin adunarea părților lui 220: $1+2+4+5+10+20+11+22+44+$ $+55+110$, se obține exact 284.

— Cred că s-a bucurat cînd a stabilit acest rezultat, nu-i așa?

— Nu prea! Mai degrabă cred că a fost dezamăgit că nu m-a putut înfunda, fiindcă nu l-am auzit pronunțînd decît „mda". Aveam impresia că-i slăbise și elanul — făcuse probabil un prea mare efort matematic! — eu însă m-am încăpățînat să duc lucrul pînă la capăt, așa că i-am propus să descompunem și pe 284 în factori ca să se convingă că și „inversul" este adevărat. De data aceasta s-a orientat cu ușurință, a notat pe hîrtia lui rezultatul $1+2+4+71+142=220$, apoi a îndoit hîrtia, a pus-o în buzunar și s-a sculat. Mi-a întins mîna cu un zîmbet politicos, luîndu-și rămas bun: Așadar, asta a fost toată filozofia și toată taina?

Iar m-a apucat, nu știu cum, o jale de uscăciunea din sufletul omului acesta și m-am decis să picur în el un strop de desfătare. Am început să-i spun că pe aceste două numere Pitagora le-a numit *numere prietene*, și i-am arătat de ce, apoi că ele au interesat prin proprietatea care o au, pe mulți matematicieni greci și arabi din Evul Mediu și din Europa apuseană și chiar pe matematicienii din zilele noastre. Mă bucuram văzînd cum i se destinde chipul, a zîmbit, și mă pregăteam să-l opresc ca să bem o cafea și să-i arăt cît de interesante sînt problemele din teoria numerelor, că Fermat era și el jurist, cînd îl aud spunîndu-mi:

— Ca să vezi cu ce-și pot bate oamenii capul! Curat vorba bătrînească: Satul arde și baba se piaptănă! Auzi aiureală: „Numere prietene". Nu-s oamenii prieteni și au să fie numerele! După ce am închis ușa în urma lui, m-am întors la masa asta de lucru, am început să răsfoiesc cărți, și note și să-mi notez în acest caiet tot ce-am putut. În același timp, ca plăcerea să-mi fie deplină, am citit sau recitit toate cărțile despre prietenie ce mi-au căzut în mînă și mi-am notat cîteva păreri pro și contra ei. De pildă, acestea a lui Aristotel din *Etica nicomahică*: „Prietenia este o virtute sau cel puțin a fost însoțită întotdeauna de virtute. În plus, este una dintre trebuințele cele mai necesare ale vieții, nimeni nu va accepta să trăiască fără prieteni, chiar dacă ar avea toate bunurile celelalte". Și părerea amărîtului de La Rochefoucauld: „Ceea ce au numit oamenii prietenie nu este decît o asociație, o menajare reciprocă a intereselor și un schimb de servicii, în sfîrșit, nu e decît o negustorie în care amorul propriu își propune ceva de cîștigat".

— Trebuie să recunosc, dragă Toader, că nu știi niciodată de unde sare iepurele. Eram cu adevărat gelos pe acest avocat și cînd colo, numai datorită lui am să mă pot lăfăi lîngă numerele ce au fost purtate la piept, drept talisman, secole de-a rîndul de către toți ce-i ce-și doreau să rămînă prieteni pe viață. Și tot lui trebuie să-i mulțumesc că te-a făcut să apreciezi „înaltele mele calități de ascultător"! Sper că ai tras concluziile cuvenite, anume că asemenea specie de prieten este o floare rară ce trebuie cultivată cu grijă, ca să nu se veștejească!

— Așa-mi trebuie dacă n-am avut ce face și nu te-am lăsat să-ți închipui că ești mai tare ca Sherlock Holmes, așa-mi trebuie dacă am vorbit ce nu trebuia!

— Atunci repară și spune numai ce trebuie. De pildă, povestea lui Iamblic cu care amicul matale nu a fost de acord!

— Bine dar tu o cunoşti! Totuşi dacă vrei s-o mai auzi, aşteaptă să aduc şi cafelele ce au rămas nefăcute de atunci!

— Bine zis, că nu-i pentru cine se găteşte! Eu deschid caietul pînă atunci. A, uite! văd aici că povestea se află în *Comentariile* lui Jamblic la *Aritmetica* lui Nicomah din Gherasa, care a scris această carte prin jurul anului 100 al erei noastre.

— Se spune, — a început prietenul meu povestea după ce a pus cafelele pe masă, că odată a venit cineva la Pitagora şi l-a rugat să-i arate cum ar trebui să fie doi oameni, unul faţă de altul, ca să se poată numi cu adevărat prieteni? Să se comporte ca numerele 220 şi 284, a răspuns Pitagora, fiindcă aceste numere sînt astfel că fiecare din ele este format din suma părţilor celuilalt, adică fiecare este un alt eu.

— Nu cred că a fost vreodată o mai adîncă definiţie a prieteniei! Pitagora a putut-o găsi, fiindcă pentru el, universul întreg, precum şi toate părţile lui, se abstractizau în numere. Cînd a impus condiţia ca unul dintre numere să fie suma divizorilor celuilalt, să cuprindă adică tot ce are celălalt număr mai intim în fiinţa lui, el a transpus aceeaşi condiţie la oameni: toate gîndurile, toate aspiraţiile, toate preocupările unuia să aibă sălaş în sufletul celuilalt. Or, ca să se petreacă acesta, oamenii nu pot fi luaţi la întîmplare, după cum nici numerele nu-s oarecari, ci nu mai 220 şi 284. Cînd am terminat, Teodor Solonar a luat caietul şi l-a răsfoit. Apoi mi-a spus :

— Cred că Cicero a cunoscut această definiţie a lui Pitagora şi s-a gîndit, ca şi tine, la semnificaţia ei. Uite ce scrie el în *De amicitia* : „Natura, mai mult decît necesitatea, dă naştere prieteniei, ea are la origine o chemare a inimii şi un sentiment de afecţiune şi nicidecum gîndul la foloasele pe care le-ar putea trage". Cîtă deosebire între el şi La Rochefoucauld, sau Helvetius care scria : „Nu există prietenie fără interes ; ar fi un efect fără cauză".

— Constat că-ţi place să te abaţi din drum ! În locul lui Helvetius îl prefer pe sirianul Iamblic, care după cîte ştiu a scris mai multe cărţi despre Pitagora.

— Da, a scris 9 cărţi, însă nu s-au păstrat decît patru. În ele se cuprind cele mai multe informaţii ce le avem despre şcoala lui Pitagora, numai că redate după vreo mie de ani !

— Şi de la Iamblic pînă acum au trecut peste 1 500 de ani. Ce înseamnă însă veacurile pentru noi ? Jonglăm cu ele mai bine decît artiştii de la circ cu farfuriile sau făcliile aprinse !

— Prea prezumţioasă ţi-e afirmaţia! Mai degrabă cred că ne strecurăm printre veacurile trecute ca să savurăm far-

mecul și suavitatea unor probleme pe care trecerea acestor veacuri nu le-a stins, de pildă numerele prietene sau alte proprietăți ale numerelor, stabilite de pitagoreici.

— Rămîn la părerea mea, eu am senzația că jonglez cu veacurile prefăcute-n farfurii sau în torțe; pe acestea le arunc cu o anumită măiestrie în urma mea și iată-mă ascultîndu-l cu înfrigurare pe Pitagora însuși, tălmăcindu-mi legile Universului cu ajutorul numerelor... „singurele în stare să ne apropie de legile naturii, pe care numai înțelegîndu-le le putem stăpîni".

— Admir entuziasmul tău care a înfruntat și el zecile de ani și-mi pare rău că trebuie să-l mai temperez! E greu de afirmat cu certitudine ce a spus și ce a gîndit Pitagora, fiindcă el n-a scris nimic. Tot ce știm s-a păstrat numai prin tradiție, învăluit în legendă și scris de elevii din școala lui. Un fragment păstrat de la Philolaos, pitagorician de la sfîrșitul veacului V î.e.n., ar putea fi pus alături de cele ce afirmai tu mai înainte: „Tot ce se poate recunoaște are număr, căci fără de număr nu este posibil să cuprinzi ceva cu gîndul sau să recunoști".

— Admirabil! Spune-mi dacă această frază nu-i valabilă și azi, scrisă cu exact aceleași cuvinte ca și acum 2 400 de ani?

— Nu te contrazic decît numai ca să-ți atrag atenția că *înțelesul* cuvîntului *număr* nu mai este același ca pe vremea lui Pitagora. Aristoxen din Tarent, de pildă, care a trăit cu vreo sută de ani după Pitagora, afirma că Pitagora privea Aritmetica drept cea mai frumoasă și mai favorizată știință, fiindcă numai pentru ea lucrurile apar sub forma numerelor!

— Iar mi-ai dat apă la moara mea! Dacă nu mă-nșel Gauss, marele Gauss, a spus-o în plin secol al XIX-lea că „Aritmetica este regina matematicilor", adică nu a „spus", ci a repetat cele afirmate de Pitagora.

— Ai dreptate! El a făcut descoperiri de seamă în toate domeniile matematicilor, dar a îndrăgit îndeosebi *Teoria numerelor*, așa că era îndreptățit să spună că: „*Matematica* este regina științelor, iar *Aritmetica* regina matematicilor".

— Am citit odată, într-o carte, că matematicienii care fac atîta caz de logică, au o terminologie foarte puțin logică! Nu vreau să discutăm această chestie acum, dar mi-a venit în minte fiindcă te aud spunînd cînd *Teoria numerelor*, cînd *Aritmetică*. Știu bine că este o deosebire între aceste două denumiri, și de aceea aș vrea să o precizăm.

— *Teoria numerelor* este un termen mai nou, folosit din secolul al XVIII-lea pentru capitolul din *Aritmetică* ce se ocupă numai cu studiul proprietăţilor numerelor întregi. Cînd Gauss vorbeşte de *Aritmetică*, el se referă, de fapt, la *Teoria numerelor*. *Aritmetica* însă (de la *arithmos* care în greceşte înseamnă *număr*) studiază proprietăţile tuturor numerelor întregi, raţionale şi iraţionale precum şi metodele practice privind operaţiile cu numere şi, de asemenea, problemele legate de diferite sisteme de numeraţie. La greci însă, *Aritmetica* era ştiinţa numerelor întregi, adică exact ceea ce numim azi *Teoria numerelor*.

— Ştiu că Pitagora şi toţi matematicienii greci de după el, inclusiv Euclid, considerau ca numere numai întregii, iar fracţiile şi numerele iraţionale erau privite drept mărimi care exprimau o măsură, uneori prin numere întregi, dar alteori nu. Ştiu că operaţiile elementare dintre numere erau explicate în *Logistică*, cuvîntul *logistiki* avînd chiar înţeles de „calcul numeric". Acum e clar că atunci cînd vom vorbi de *Aritmetica* grecească ne vom referi la ceea ce azi se numeşte *Teoria numerelor*. Nu s-ar putea spune că *numerele întregi* au exercitat o cruntă tiranie asupra matematicienilor greci ?

— Ba da, dar era o tiranie care le era pe plac ! Egiptenii, babilonienii, hinduşii sau alte popoare din antichitate au privit numerele dintr-un punct de vedere mai realist, care se aseamănă cu cel de azi şi numai datorită acestei concepţii generale despre număr s-au putut dezvolta metodele practice de calcul şi tehnica lui. În schimb, grecii au transferat problemele legate de fracţii şi de numerele iraţionale în domeniul geometriei şi eliminînd problemele practice, au putut stabili acele minunate proprietăţi ale numerelor întregi, care au delectat antichitatea, pe matematicienii din Evul Mediu, din Renaştere şi din Epoca modernă.

— Dacă mă gîndesc mai bine, mi se pare că înţeleg de ce grecii au crezut că numai întregii sînt numere. Deşi în natură se întîlnesc ambele înfăţişări distincte şi opuse : *discretul* şi *continuul*, *discretul* e singurul care se numără, pe cînd *continuul* se măsoară. Lucrurile vii nu se pot împărţi : o jumătate de vacă nu mai rămîne vacă vie care să dea lapte un sfert de ou nu mai este un ou şi din el nu va mai ieşi un pui, aceste obiecte se păstrează numai ca unităţi indivizibile. Mulţimea lor *se numără* şi rezultatul *numărării* se exprimă prin numere întregi. Teoria atomică a lui Democrit sau mulţimea stelelor de pe cer pledează pentru unităţile indi-

vizibile. Tot stelele însă, prin mişcarea lor neîntreruptă pe bolta cerească, ca de altfel şi drumul descris de un peşte în apă, de o pasăre în zbor, oferă imaginea mărimilor continue. O jumătate de măsură de miere sau de lapte are sens şi obiectul nu-şi schimbă identitatea după cum un sfert dintr-un ogor poate fi lucrat exact ca şi cum ogorul nu ar fi fost împărţit. Acestea sînt exemple de mărimi continue care nu se mai *numără* ca mărimile discrete, ci *se măsoară* ! Totul este număr, a spus Pitagora, totul curge, spune Heraclit. Grecii au separat ceea ce de fapt se împleteşte şi nu se poate separa, dar în felul acesta au putut păstra şi cea mai simplă, cea mai naivă şi cea mai plastică noţiune de număr. Cîndva, cînd ai încercat să-mi spui ce se înţelege azi prin număr, m-am încrîncenat, nu era de mine. Hai să mai zăbovim în preajma lui Pitagora şi să-mi arăţi unele dintre proprietăţile numerelor întregi pe care le-a descoperit el sau la care a cugetat.

— Mai întîi să facem o precizare. Nu e vorba de numerele întregi, ci de *numere naturale*. În mulţimea numerelor întregi se cuprinde şi *zero* şi *numerele negative*, care nu făceau parte din mulţimea numerelor considerate de Pitagora. În privinţa proprietăţilor numerelor naturale, cred că cea mai veche descoperire rămîne deosebirea dintre numerele *pare* şi *impare*. Opoziţia dintre *par* şi *impar* forma chiar una dintre cele 10 categorii filozofice ale pitagoreicilor, dintre care cinci erau exprimate chiar în termeni matematici.

— Le ştii şi pe celelalte patru ?

— Nu, dar le am notate aici în caiet. Iată-le : *unu-multiplu, limitat-nelimitat, drept-curb, pătrat-nepătrat*. Şi, ca să vezi cîtă atenţie şi cît de la modă era problema par-impar, uite că am notat, tot aici în caiet, un fragment din Epiharm, datînd din secolul V î.e.n.

— Da ? Trebuie să fie Epiharm din Siracuza, care a scris mai multe comedii.

— Întocmai, şi de aici poţi deduce că preocuparea nu aparţinea numai matematicienilor, ci se răspîndise de pe atunci, în cercurile mai largi. Iată ce scria el : „Dacă cineva vrea să adauge o piatră la un număr impar sau chiar la unul par, sau să ia o piatră dintre cele care există, crezi oare că numărul are să rămînă la fel ?" Un secol mai tîrziu, Aristotel scria : „Aritmetica răspunde la întrebarea: ce este imparul, parul, un pătrat, un cub".

— Văd că în cele două citate, în primul direct, în celălalt indirect, se face aluzie la folosirea pietricelelor pentru numărare. Ştiu că de obicei erau alese pietricelele de aceeaşi mărime şi formă.

— Da, numai că numele de „calcul“ se trage de la numirea latinească a pietrei şi nu de la numirea grecească „psifi“ care avea înţeles mai degrabă de literă, ca semn.

— Poate fiindcă romanii au folosit pietrele în abacele cu care efectuau, de fapt, calculele practice, socotelile, pe cînd grecii se jucau cu ele, imaginînd figuri geometrice şi numărînd cîte pietricele le cuprind. Poate că, de multe ori grecii nici nu mai foloseau pietre adevărate, ci le înlocuiau cu puncte pe care le deseanu. În felul acesta, ei au descoperit şi au izolat şiruri întregi de numere, care se formau după anumite legi, aveau anumite proprietăţi şi se reprezentau prin aceleaşi figuri. De aici şi numele de *numere figurative* care le-au rămas pînă azi.

Probabil că la asemenea numere s-a referit Aristotel cînd a numit pătratul sau cubul ?

— Da. Uite de pildă prin *numere triunghiulare* se înţeleg acelea în care pietrele, sau punctele, se pot aşeza sub formă de triunghi dreptunghic sau isoscel :

```
0       0          0          0
        0 0        0 0        0 0
                   0 0 0      0 0 0
                              0 0 0 0 ....
1       3          6          10
```

Dacă te uiţi la ele, vezi că asemenea numere se formează prin adunarea succesivă a numerelor din şirul natural :

$$1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10, \ldots$$

În acelaşi timp, aceste numere, fiind în progresie aritmetică cu raţia 1, ştii că suma lor, dacă numărul termenilor se notează în general cu n, este dată de formula $1+2+3+\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$, or, această formulă are o interpretare geometrică. Ea este aria unui triunghi cu baza n şi cu înălţimea $n+1$ sau invers. Aşadar, iată numirea justificată. Cît despre *numerele pătrate* :

```
        0 0        0 0 0      0 0 0 0
0       0 0        0 0 0      0 0 0 0
                   0 0 0      0 0 0 0 ...
                              0 0 0 0
1       4          9          16
```

ele se obţin prin însumarea numerelor impare consecutive :

$$1, \ 1+3=4, \ 1+3+5=9, \ \ldots$$

Aplicînd aceeaşi regulă, a progresiilor aritmetice cu raţia 2, şirului format din n numere, rezultă :

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

De aceea, numerelor pătratice li s-au spus prin prescurtare *pătrate* şi azi se spune tot aşa : 25 este pătratul lui 5, iar 5 este *rădăcina pătrată* a lui 25 ! Grecii nu spuneau rădăcină pătrată, ci mai sugestiv, „*latură*" : „Pătratul 25 are ca *latură* pe 5". Numerele pătrate se pot obţine şi prin alăturarea a cîte două numere triunghiulare egale ; în acest caz, una dintre baze se suprimă, după cum vezi uşor de pe figură. Aceasta revine la a aduna două numere triunghiulare consecutive :

$$\frac{(n-1)\,n}{2}+\frac{n\,(n+1)}{1}=\frac{n}{2}(n-1+n+1)=n^2.$$

Metoda de a deduce *numerele poligonale* din numerele triunghiulare a fost generalizată de către Hipsicle din Alexandria, care a trăit prin secolul II î.e.n. El a stabilit şi o formulă care exprimă numerele ale căror puncte se pot aşeza sub forma unui *pentagon regulat* (pentagonale), sau sub formă de hexagon (hexagonale) etc. Notînd cu p numărul laturilor poligonului respectiv, formula stabilită de el este :

$$n_p=\frac{1}{2}\,n[2+(n-1)(p-2)].$$

— Ia să vedem ce dă această formulă pentru pătrat :

$$n_4=\frac{1}{2}\,n[2+(n-1)\cdot 2].$$

Aşadar regăsesc, cum era şi de aşteptat, pe n^2.

— După cum ţi-am arătat, suma numerelor impare consecutive generează pătratele. Suma numerelor pare consecutive dă naştere la *numerele dreptunghiulare* :

```
              0 0 0          0 0 0 0
0 0,          0 0 0          0 0 0 0
                             0 0 0 0 , ...
  2             6              12
```

$2, \ 2+4=6=2\cdot 3, \ \ 2+4+6+=12=3\cdot 4, \ldots$

$2+4+6+\ldots 2n=n(n+1).$


Euclid

Toate aceste feluri de numere reprezintă arii de figuri plane, de aceea se numesc, cu un cuvînt, *numere plane*. Aceasta fiindcă se pot imagina și *numere solide*, punctele lor fiind așezate în straturi succesive care să formeze o piramidă, un paralelipiped, sau un cub, iar expresia lor generală va fi un produs de trei factori, ca de pildă, în cazul paralelipipedelor, $N=n(n+1)(n+2)$ sau a cuburilor, $N=n^3$.

— Bine, să zicem că puterea a treia a unui număr este considerată de matematicianul grec drept volumul cubului de latură n, dar puterea a patra ?

— Nu știu dacă au ajuns la ea. În acest caz, desigur că au avut oleacă de bătaie de cap cu asemenea numere, dar de obicei ei evitau problemele ce nu le conveneau. Știi bine cîte dificultăți existau din cauza condiției de a rezolva problemele de geometrie folosind numai rigla și compasul. Însă metoda de a privi numerele sub forma de produse i-au făcut să descopere și numerele care nu se descompun în factori, adică *numerele prime*, numere numite de ei „rectilinii" sau „liniare". Stabilirea proprietăților acestor numere i-au preocupat mult pe greci. În cartea a VII-a a *Elementelor*, Euclid le definește astfel : „11. Număr prim este acela pe care-l măsoară numai unitatea". Spre deosebire de Euclid, dar fără să-l contrazică, Aristotel spunea că : „pe un număr prim nu-l măsoară nici un număr" !

— Înțeleg de ce ! Aristotel considera că unu nu era număr, ci *unitatea* din care se formau numerele, așa că nefiind număr,

Aristotel are dreptate. Euclid credea la fel. În prima definiție din *Cartea a VII-a* găsim: „Unitatea este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu" și definiția a doua: „Iar număr o mulțime compusă din unități". Așadar, *unitatea* și nu numărul *unu* măsoară numărul prim!

— Ai explicat mai bine decît aș fi fost eu în stare să o fac!

— Te cred, m-ai descălit atîta cu Euclid al tău că, de multe ori, în loc să iau un roman de aventuri iau *Elementele* traduse de Victor Marian și mă uit prin ele. Mai ales că le am de la tine!

— Te rog lasă dulcegăriile de o parte! Văd că te lauzi cu definițiile din *Cartea a VII-a*, îți mai amintești poate vreuna?

— Desigur, trec peste acelea care stabilesc numărul *pereche*, sau *nepereche*, sau *pereche ori pereche* sau *nepereche ori nepereche* sau *pereche ori nepereche* și mă opresc la definiția 22: „*Număr perfect* este acela care este egal cu părțile sale". Dacă nimeni nu te-a întrebat despre numerele perfecte, uite că o fac eu, rugîndu-te să-mi explici ce-au mai găsit oamenii și la acest fel de numere? Or, poate acest subiect nu se găsește printre filele caietului de pe masă?

— Ba da! Tot căutînd articole despre numerele prietene, am dat peste unul, apărut în revista americană de istoria matematicilor, pe nume „Scripta mathematica", publicat în 1946 de către E.B. Escott, pe care te-aș ruga să-l cauți aici în caiet!

— Doar nu s-o fi intitulat „despre numerele perfecte"!

— Nu, ci „despre numerele prietene". După ce-l găsești, citește te rog cum începe!

— „Teoria numerelor a fost continuu studiată din timpul lui Pitagora pînă acum. Două subiecte preferate au fost „*numerele perfecte* și *numerele prietene*". Însă, după ce dă definiția numerelor perfecte și îl amintește pe $6=1+2+3$, văd că nu se mai ocupă de ele, ci numai de cele ce sînt anunțate în titlu.

— Și? Nu ajunge un ciomag la un car de oale? Ori crezi că alte cărți sau reviste nu mai pomeneau de ele? De altfel, nu știu dacă ai trecut mult dincolo de pagina cu definiții din *Cartea a VII-a* a lui Euclid sau ai preferat să rămîi la ele ca să le pătrunzi? Mă îndoiesc că ai ajuns pînă la teorema a 36-a din cartea a IX-a a *Elementelor*.

— Da, o cunosc, este o teoremă foarte indigestă, nu numai în demonstrație, dar și ca enunț. De aceea chiar aveam

de gînd să o discutăm, dar mai bine să-ți spun întîi o şaradă. Iată despre ce-i vorba : Lucian povesteşte că la Pitagora a venit odată un negustor care l-a rugat să-l învețe filozofia. Drept răspuns, Pitagora i-a zis : „Te voi învăța să numeri !" Deziluzionat, negustorul i-a răspuns : „Asta o ştiu eu foarte bine !". „Atunci numără", i-a replicat Pitagora şi negustorul a început : „unu, doi, trei, patru, ..." Pitagora i-a făcut semn să tacă şi i-a sus : „Te opresc aici căci ceea ce iei dumneata drept *patru* este *zece*, un număr perfect şi simbolul nostru".

— Cunosc anecdota şi bănuiesc eu ce te doare! Vrei să-mi arăți că Pitagora nu ştia ce spune, căci 10 nu-i un număr perfect, fiindcă suma divizorilor lui : $1+2+5=8$ este mai mică decît 10, aşadar un număr neperfect.

— Exact! Şi cu asta sper că te-am făcut praf nu numai fiindcă ai putut constata cît de înalte sînt cunoştințele mele, dar şi pentru că nu prea văd cum ai să ieşi din încurcătură!

— Da, grea problemă cînd ai de-a face cu cărturari luminați. Negustorul acela trebuie să se fi minunat de răspunsul lui Pitagora şi dacă nu a fost înfumurat şi i-a urmat învățătura, a aflat îndată că Pitagora îi arătase numerele triunghiulare: 1, 3, 6, 10. Zece este al *patrulea număr triunghiular* şi, mai mult, el este un triunghi perfect, fiindcă aria lui se exprimă prin decadă. Aici *perfect* nu este folosit cu înțelesul strîmt al unei categorii de numere, tot aşa după cum mai tîrziu, prin secolul II, Theon din Smirna numea *perfect* pe numărul 3, fiindcă „el este primul număr care are început, mijloc şi sfîrşit şi este, totodată, liniar şi plan!"

Apoi, Teodor Solonar a adus o carte cu copertă albastră şi mi-a întins-o, privindu-mă şugubăț :

— Uite, la pagina 87 ai să găseşti teorema care te-ar fi „surmenat" dacă ai mai fi stăruit să o dezlegi. A căpătat o formă modernă, frumoasă şi uşor de înțeles. După cum vezi, cartea a fost compusă la Iaşi de către un colectiv condus de către binecunoscutul profesor al Universității din Iaşi şi multă vreme rectorul ei, doctor docent Ion Creangă.

Am luat cartea pe care mi-a întins-o prietenul meu. Avea ca titlu : *Introducere în teoria numerelor* şi la pagina indicată am găsit teorema cu numărul 5.3 : „Condiția necesară şi suficientă ca un număr natural par n să fie perfect este ca n să fie de forma :

$$n=2^t(2^{t+1}-1)=2^t \cdot p,$$

unde t este un număr natural, iar p este un număr prim". Nu-mi venea să cred că-i aceeași teoremă cu ce din *Elemente* și de aceea doream să o compar. Am găsit-o și i-am citit-o prietenului meu: „Dacă oricîte numere începînd cu unitatea se pun pe rînd în proporție dublă pînă ce suma tuturor devine un număr prim, și dacă suma înmulțită cu ultimul face un număr oarecare, produsul va fi un număr perfect.

— Nu, dragă Teodor, orice ai spune tu, îmi este imposibil să înțeleg ceva din această formulare și îți mărturisesc recunoștință că mi-ai arătat că ea poate fi scrisă așa de frumos și simplu! Îmi place așa de mult, încît te rog să ne oprim aici și să facem cîteva încercări ca să stabilim, după acest criteriu, cîteva numere perfecte!

— Dar cu numerele prietene ce se mai aude, le-am pus de mămăligă?

— Lasă, nu te mai grozăvi acum și tu, că nu ne mînă nimeni din urmă. Trebuie să vedem, mai întîi, pentru ce valori ale lui t, expresia $(2^{t+1}-1)$ este un număr prim, nu-i așa? Încerc $t=1$: Avem: $2^2-1=3$; Așadar, $t=1$ verifică și rezultă $n_1==2\cdot 3=6$. Deci 6 nu este numai un număr perfect, dar mai este și triunghiular! Observăm că și $t=2$ verifică: $2^3-1=7$. Prin urmare, acum apare al doilea număr perfect. Care-i oare? Parcă nu îndrăznesc să-l calculez!

— Curaj că doar, nu te așteaptă decît o simplă înmulțire.

— Da: $n_2=4\cdot 7=28$. Dar nu-i vorba numai de asta. Să găsesc și divizorii lui 28 și să verific!

— Adică, nu ai încredere în teoremă sau în tine? Ori în amîndouă?

— De ce încerci să te răzbuni? Nu vezi că eu am cedat?

— Ai dreptate, *tu* ai cedat și văd că ai scris divizorii lui 28.

— Da, avem: $1+2+4+7+14=28$. Merg mai departe și pun $t=3$. Am $2^4-1=15$. Ce rău îmi pare! Formula nu se mai aplică. Să fac $t=4$: $2^5-1=31$. Strașnic! 31 este un număr prim, deci am descoperit al treilea număr perfect. El este $n_3=16\ .\ 31=496$. Cam mare, totuși lasă-mă să-i aflu divizorii și să fac proba!

— Dacă-ți face plăcere, de ce nu te-aș lăsa! Numai că te-aș sfătui să numerotezi, numerele nu cu indicele ce arată succesiunea lor, ci cu indice care arată valoarea lui t. Așa că, în loc de n_3 să pui n_4. E mai sugestiv și mai interesant, căci tot nu poți număra toate numerele perfecte.

— Asta-i adevărat, bănuiesc că numărul lor este infinit. Avem dar $n_4=496$ și scriindu-i divizorii găsesc:

$$1+2+4+8+31+62+124+248=496.$$

Observi că aceste două numere din urmă nu mai sînt și triunghiulare?

— În schimb sînt rectangulare.

— Nu înseamnă mare lucru, fiindcă toate sînt, după formulă, produs de doi factori. Dar ia să mai vedem ce se întîmplă pentru $t=5$?

— Potolește-te și păstrează-ți elanul pentru alte probleme care așteaptă să le cinstești cu atenția ta. Ca să nu fii prea necăjit, află că de abia pentru $t=7$ ai să găsești al patrulea număr perfect care este 8 128.

— Spune-mi cîte numere perfecte au fost cunoscute în Antichitate?

— Numai acestea patru despre care am discutat noi acum. Ele se găsesc amintite în *Aritmetica* lui Nicomah din Gherasa, carte scrisă pe la începutul veacului al doilea, după cum mi se pare că ți-am mai spus. Cartea are un nivel științific cu mult inferior cărților VII—IX din *Elementele* lui Euclid, însă ea a avut un mare succes, datorită comentatorilor ei, care la rîndul lor nu au putut face nici atît cît a făcut Nicomah și s-au mărginit să o explice și să mai adauge, ici și colo, informații ce le găseau în alte lucrări.

— Consider că era normal să fie așa, fiindcă Egiptul își pierduse independența de mai bine de un secol, iar faimoasa Școală din Alexandria își închisese de mult porțile. Marea epocă de glorie a matematicienilor greci trecuse, iar romanii nu erau amatori de matematici și nici nu au încurajat studiul lor. Trebuie să fim recunoscători acestor comentatori care se străduiau să păstreze o licărire din trecut. Mi se pare că Iamblic, comentînd această lucrare a lui Nicomah, a adus la cunoștință descoperirea numerelor prietene de către pitagoreici.

— Da. Aceasta cu ocazia comentariului său asupra celor 4 numere perfecte pe care le discuta Nicomah. Și cred că are să-ți placă să afli că Nicomah se ocupa de distribuția acestora. El a observat că printre unități este un singur număr perfect: 6. Tot așa, printre zeci, numai 28 este perfect, printre sute tot un singur număr este perfect și la fel, nu nu se află decît un singur număr perfect printre cele 1 000 de numere formate din 4 cifre. De aici a dedus că deși în numă infinit numerele perfecte se îndepărtează mult unele de altele și că ele se termină fie în 6, fie în 8!

Marin Mersenne



— Cînd a fost calculat al cincilea și de către cine?

— De-abia în secolul al XV-lea de către Regiomontanus. Dar el nu se află printre zecile de mii, ci printre zecile de milioane!

— Îl ai poate notat?

— Mă mir că mai întrebi! Uite-l aici, după notația noastră el este : n_{13}=33 550 336. În secolul următor, J. Scheybel, traducătorul lui Euclid în limba germană, a mai găsit două numere perfecte : n_{17} și n_{19}, acesta din urmă avînd 12 cifre, adică fiind de ordinul bilioanelor! Peste alți 100 de ani s-a mai găsit un îndrăgostit de cifre și de perfecțiunea exprimată prin numere, care a adus la lumină al optulea număr : n_{31}. El se află în ordinul pentalioanelor, adică are o suită de 22 de cifre!

— Și care-i numele fericitului calculator?

— Dacă nu te-ar fi înfricoșat așa de tare teorema 36 din cartea a IX-a a lui Euclid, ai fi găsit singur răspunsul în nota de la pagina 249 a volumului II al *Elementelor* traduse de Victor Marian. Iată ce spune el : „Al optulea număr 2 305 843 008 139 952 128 se află la Mersenne..."

— Atunci el l-a calculat?

— Greu de spus! Foarte probabil că da, însă ar fi putut să-l fi calculat și Fermat care îi transmitea multe dintre rezultatele stabilite de el din teoria numerelor, fără să aibă nici un fel de pretenții de autor.

— După cîte știu eu, Marin Mersenne, călăugăr sau poate numai frate franciscan din secolul al XVII-lea, era un mare amator de matematici și animator al matematicienilor, pe care-i stimula în descoperirile lor atît prin scrisorile ce le primea și le trimitea, cît și prin corespondența pe care o dirija între cei interesați de aceleași probleme. Se spune că revoluția științifică din Franța îi datorează mai mult lui decît Universităților ce continuau să-și păstreze caracterul lor scolastic. Thomas Hobbes afirma că prefera chilia lui Mersenne oricărei alte școli de filozofie din Paris și ori de cîte ori trecea Canalul, îl vizita pe Mersenne. În chilia lui—locul de întîlnire al savanților din Franța și din străinătate—s-a pus și baza Academiei franceze.

— E adevărat, numai că pe Mersenne l-au interesat, în aceeași măsură, și experiențele de fizică și chimie care începuseră pe atunci să-i preocupe pe oamenii de știință. De aceea, cartea pe care a publicat-o în 1644 la Paris are ca titlu *Cogitata Physico-Mathematica.* Aici se află multe probleme din teoria numerelor printre care un loc aparte îl ocupă problema numerelor prime. După cum ai văzut însăși existența numerelor perfecte este condiționată de faptul că numărul $p=2^{t+1}-1$ să fie un număr prim. Azi aceste numere poartă numele de „Numerele prime ale lui Mersenne", fiindcă ele au fost cercetate în această carte. De fapt, Mersenne a stabilit o metodă de a descompune numerele perfecte de această formă în factori primi, pentru diferite valori ale exponentului t. Prin aceasta s-au determinat totodată și valorile lui t, pentru care aceste numere sînt prime. Notîndu-le : $M_t=2^t-1$, s-a stabilit că pentru $t<257$, există numai următoarele 12 valori : $t=2$, 3, 5, 7, 13, 17. 19, 31, 61, 89, 107, 127, pentru care M_t este un număr prim. De pildă pentru $t = 11$, $M_{11}=2\,047=23 \cdot 89$. Nu este un număr prim, ci se descompune în produsul $23 \cdot 89$. În cartea despre care ți-am vorbit, Mersenne discută și despre numerele perfecte și despre numerele prietene. Între altele, el calculează n_{31}, așadar și M_{31}. Însă, în 1750, Euler a mai calculat odată M_{31} și n_{31}, neștiind că acest calcul a fost făcut cu 100 de ani mai înainte. Într-o lucrare de teoria numerelor, publicată la începutul secolului trecut, contribuția lui Mersenne nici nu mai este amintită.

— Așadar, mai rămîn 4 numere perfecte, ca să se termine seria despre care ai vorbit. Cînd au fost calculate?

— Al noulea, n_{61}, a fost calculat în secolul trecut, dar ultimele trei grupe au apărut deodată, în 1917. Trebuie să știi că aceste numere sînt gigante și au dat destul de furcă amatorilor.

— Există vreun nume pentru numerele gigante?

— Da, în 1940 Edward Kasner a propus numele de *googol* pentru 10^{100}, acest număr întrecînd se pare numărul probabil al atomilor din Univers. Cu ajutorul ordinatoarelor, începînd din anul 1958, s-au putut stabili încă 11 numere prime ale lui Mersenne și anume, pentru următoarele valori ale lui t : t=521, 657, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, 9689, 9 941 și 11 213.

Ultimul, descoperit în 1964 are 3 376 de cifre, adică este mai mare decît un *googol* și, ca să fie imprimat, are nevoie de 12 pagini.

— Atunci numărul perfect care-i corespunde, oare de cîte pagini va fi avînd nevoie?

— Asta nu o mai știu.

— În definitiv, cu aceste informații putem considera problema numerelor perfecte încheiată, nu?

— Nu! Există încă probleme anexe care așetaptă dezlegarea. De pildă :

1) Nu-i nici un motiv și nici nu-i demonstrat că n-ar putea fi numere perfecte nepereche. Sînt, sau nu sînt?

2) Numerele perfecte pot fi obținute numai prin formula lui Euclid?

— Nu ți se pare că dacă s-ar găsi răspuns la prima întrebare, acesta ar răspunde și la cea de a doua?

— Da, în parte, căci după formula lui Euclid, toate numerele perfecte trebuie să fie pare și dacă ar exista un număr perfect impar, atunci el ar trebui să se calculeze în mod obligatoriu prin altă formulă!

— Da, ai dreptate și de aceea, tot în mod obligatoriu propun să ridicăm ședința, că pe ziua de azi ne-ajunge!

A doua zi dimineață, prietenul meu mi-a spus zîmbind

— Să-ncepem și ziua de azi cu : „Mai aveți o întrebare?"

— Desigur, i-am răspuns bucuros că-l văd așa de bine dispus. Aș avea de pus două întrebări :

1) În afară de perechea 220, 248 au mai fost găsite și alte perechi de numere prietene? Cînd și de către cine?

2) Dacă există, ca în cazul numerelor perfecte, vreo regulă pentru a le calcula ?

— Da, mulțumesc. Am să răspund, deocamdată parțial, la prima întrebare. Pînă în secolul al XVII-lea nu a fost

cunoscută altă pereche de numere prietene. În anul 1636, Fermat a descoperit o nouă pereche, iar doi ani mai tîrziu, Descartes a calculat a treia pereche de numere prietene. La a doua întrebare vă pot informa tot parţial deocamdată că în secolul al IX-lea celebrul matematician şi astronom arab, stabilit la Bagdad, pe nume Tabit ibn Korra, adică Tabit feciorul lui Korra, a găsit o formulă care arată cum se pot calcula perechile de numere prietene, însă în mod practic nu a calculat o nouă pereche. Mai mult, spre deosebire de cazul numerelor perfecte, pentru determinarea perechilor de numere prietene nu există o formulă generală care să permită calcularea lor, dar există multe formule particulare.

— Acum, pune te rog mîna pe creion ca să-mi explici cum a ajuns Tabit al matale şi feciorul nu ştiu cui, la formula sa.

— Prea multe vrei să ştii. Eu îţi propun să te mulţumeşti numai cu formula, aşa cum a dat-o el, fără nici un fel de explicaţii, cum era dealtminteri şi obiceiul. Treaba lui cum a găsit-o, tu foloseşte-o! „Dacă se pot găsi trei numere p, q, r, toate prime şi care să fie de forma:
(1) $p=3 \cdot 2^n-1$, $q=3 \cdot 2^{n-1}-1$, $r=9 \cdot 2^{2n-1}-1$, unde n este un număr natural, mai mare decît unu, atunci perechile
(2) $A=2^n \cdot p \cdot q$ şi $B=2^n r$, sînt numere prietene".

— Bine, dar văd că formulele acestea permit să stabileşti cîte perechi de numere vrei. De ce oare maestrul Tabit nu a făcut-o? Oricum, înainte de a o face eu, vreau să văd ce se întîmplă cu formulele (2) pentru cazul $n=1$, pe care văd că l-a lăsat de o parte.

Înlocuind în formulele (1) rezultă:
$p=3 \,.\, 2-1=5$, $q=3-1=2$, $r=9 \,.\, 2-1=17$, adică 3 numere prime.

Dacă le înlocuiesc în (2) obţin:
$A=2 \cdot 5 \cdot 2=20$ şi $B=2 \cdot 17=34$.

Iată o pereche de numere destul de simpatică, nu-s ele oare prietene?

— Pune-le la încercare şi ai să vezi!

— Atunci să stabilim divizorii: $20=2^2 \cdot 5$ iar $34=2 \cdot 17$. Aşadar, $1+2+17=20$. Vezi? Suma divizorilor lui 34 este exact 20!

— Văd, cum să nu văd, mergi mai departe!

— Iaca merg, că n-am să stau în loc: $1+2+4++5++10=22$. Deci, 34 încurcă socotelile! Pe lîngă factorii lui 20, el ar mai avea loc şi pentru alţii străini, în timp ce bietul 20 nu admite alţi factori decît pe acei ai lui 34! Exact ca

între prietenii de care trebuie să se fi lovit un La Rochefoucauld sau Helvetius sau atîţia alţii ca să scrie despre prietenie cu atîta năduf!

— Te-aş ruga acum să-mi explici de ce regula lui Tabit nu se aplică la cazul $n=1$. De unde provine anomalia?

— Nu-i nici o anomalie, tu singur nu ai respectat *condiţia impusă de regulă* şi atîta tot. Găseşti că este o anomalie dacă te calcă o maşină, fiindcă nu ai respectat regulile de circulaţie?

— Atunci să cercetez cazul $n=2$:

$$p=3\cdot 4-1=11,\quad q=3\cdot 2-1=5,\quad r=9\cdot 2^3-1=71.$$

Toate trei sînt numere prime. Aplicînd formulele (2) găsesc: $A=4\cdot 55=220$ şi $B=4\cdot 71=284$, perechea ştiută!

— În timp ce mocoşeai la aceste calcule eu m-am întors în urmă cu vreo mie de ani şi l-am căutat pe Tabit ibn Korra. L-am găsit aplecat asupra unui medalion de aur pe care grava numărul 284. Alături de el se afla un altul cu numărul 220, frumos încadrat într-un desen. Se întuneca şi fiindcă trebuia să-l termine i-a spus ucenicului să urce în turn şi să pregătească instrumentele pentru cercetarea stelelor, că vine şi el după ce isprăveşte talismanul. I-a mai amintit că toată atenţia trebuie îndreptată spre steluţa aceea care a dispărut aseară aşa de repede la orizont, că pe ea ar vrea să o prindă aşa cum trebuie. S-ar fi urcat bucuros el singur de pe acum în turn, dar nu putea neglija treaba aceasta, care-i aducea un venit aşa de bun. Talismanele erau la modă şi cei bogaţi le plăteau bine. Cu ce cîştiga pe ele îşi întreţinea familia, plătea ucenicii şi chiar avea cu ce procura cîte un manuscris matematic, greu de găsit şi scump la preţ. De altfel, nu se cuvenea să se plîngă, căci îi şi plăcea să încrusteze aceste două numere, împodobindu-le în fel şi chip, fiindcă în timp ce lucra gîndurile lui săpau şi ele în adîncuri. Aşa a aflat că aceste două numere nu aveau nici o taină ci s-au legat între ele ascultînd de o lege tot aşa cum ascultă şi stelele de o lege cînd se rotesc zilnic în jurul pămîntului, sau cum ascultă diagonalele unui pătrat de legea ce le porunceşte să se taie în părţi egale. Ştia că ar putea găsi şi alte perechi de numere care să asculte de aceeaşi lege a prieteniei şi chiar dorea să le calculeze poate odată, cînd va avea mai mult timp... oricum acest lucru nu-l va spune nimănui fiindcă ar putea fi acuzat de blasfemie, de ateism sau cine mai ştie de ce! Unii oameni cred în puterea acestor două numere de a proteja prietenia şi cu ce drept ar veni el să le tulbure credinţa?

Cînd a tăcut, Teodor Solonar păstra încă privirea pierdută în gol, iar ochii îi erau umezi, de-abia cînd a observat că-l privesc curios, s-a scuturat de gînduri. Atunci i-am zis :

— Da, aici ar fi o explicație a faptului că Tabit nu a mai calculat altă pereche. Dacă aceste numere au trecut din domeniul științei în acela al magiei, era natural să se fi mărginit la perechea știută !

— Asta-i sigur! mi-a răspuns prietenul meu. Uite ce scrie Oystein Ore în cartea sa *Number Theory and its History* :

„În scrierile matematice arabe, numerele prietene apar de mai multe ori. Ele au jucat un rol în magie și astrologie, în stabilirea horoscoapelor, în vrăjitorie, în amestecul poțiunilor de dragoste și în fabricarea talismanelor. Ca o ilustrare vom cita din *Historical Prolegomenon* al învățatului arab Ibn Khaldun (secolul XIV) : *„practica artei talismanelor ne-a făcut să recunoaștem minunatele virtuți ale numerelor prietene. Ele sînt 220 și 284... Autorul Ghaia-ei, alți mari maeștri declară că ei au văzut acestea confirmate de experiență".*

— Foarte nostim, mai ales că, după cîte știu eu, Ibn Khaldun, tunisian de origine, este recunoscut nu numai ca un istoric celebru, dar și ca un bun cunoscător al științelor de atunci, în seriile lui existînd multe observații științifice serioase!

— Spui că-i nostim! Ei, atunci află una și mai nostimă, rămasă de la alt arab, astronom și medic vestit, care a trăit pe la începutul veacului al XI-lea la Cordova. Se numește Abulcasis al Madjriti. El afirma că aceste două numere exercită cu adevărat o influență miraculoasă, pe care a cunoscut-o el însuși, fiindcă a dat cuiva să mănînce numărul 220 în timp ce el a mîncat numărul 284! Păcat că nu ne spune și cum le-a preparat !

— Din cele ce-mi spui, trag concluzia că faima acestor două numere a fost adusă prin scrierile matematice și nematematice arabe, căci atît Nicomah cît și Iamblic păstrează o atitudine științifică în informațiile ce le dau.

— Cred că da. În cărțile de aritmetică tipărite în Europa apuseană prin secolele XV și XVI de către Chuquet, Stiefel, Cardan, Tartaglia, șl de alții, apar și aceste numere. Ele sînt date numai drept exemplu în legătură cu proprietatea divizorilor lor, dar în nici una dintre aceste cărți nu se menționează formula lui Tabit ibn Korra și nici proprietățile magice! Și Mersenne, într-o carte, tipărită mai înainte de *Cogitata*, cu titlul *Les preludes de l'Harmonie universelle*, le amintește.

Astfel se face că, citind cartea, Pierre Fermat cu pasiunea care o avea pentru problemele din teoria numerelor, nu s-a lăsat pînă ce nu a stabilit legea lor de compunere și nu a găsit încă o pereche! În 1636, la doi ani după ce apăruse cartea lui Mersenne, autorul primește o scrisoare de la Fermat, în care îi comunică o a doua pereche de numere prietene, anume :

$$A=2^4 \cdot 23 \cdot 47=17\,296 \text{ și } B=2^4 \cdot 1\,151=18\,416.$$

— Exact formula lui Tabit pentru $n=4$. Ceea ce înseamnă că pentru $n=3$, p, q și r nu sînt numere prime! A arătat Fermat cum a stabilit aceste numere?

— Atunci nu, dar mai tîrziu da, și îți voi arăta îndată procedeul lui. Mai înainte însă, aș vrea să te pregătesc sufletește ca să nu ai deziluzii. Trebuie să știi că, pe vremea lui Fermat, și cu atît mai mult în timpul lui Tabit, nu exista formalismul cu care ești azi așa de obișnuit, încît nu-ți închipui cum ar fi putut exista aritmetica fără de el!

— Iartă-mă dar nu înțeleg ce vrei să spui? Te referi la formulele algebrice?

— Mă refer mai ales la semnele de operație, +, —, × :, = și literele puse în locul cifrelor, cu care să poți nota orice putere a unui număr sub formă exponențială, ca de pildă, la forma în care ți-am scris eu formulele lui Tabit. Nici el și nici Fermat nu le-au scris și deci nu le-au gîndit așa. Cum a procedat Tabit, nimeni nu mai știe, dar iată cum descrie Fermat calea pe care a urmat-o :

„Se începe cu progresia geometrică : 2, 4, 8, 16,... și dedesubt se pun numerele triple corespunzătoare. Apoi, din fiecare se scade cîte 1 și rezultatele se scriu pe rîndul de deasupra. În fine, în rîndul de jos se scriu numerele obținute prin produsul a două numere consecutive din rîndul trei, din care scazi 1 :

5	11	23	47	...
2	4	8	16	...
6	12	24	48	...
	71	287	1 151	...

Cînd un număr din ultimul rînd este prim, ca 71, și la fel cel de deasupra din rîndul întîi, ca 11, și la cel precedent lui, ca 5, atunci aceste numere conduc la numere prietene. De exemplu, numărul din ultimul rînd, 71 și cele din primul rînd, 11 și 5, sînt prime. Dacă se înmulțește 71 cu 4 se obține 284 și înmulțind 5 cu 11 și cu 4 obținem 220. La fel, $1\,151 . 2^4 = 18\,416$ și $23 . 47 . 2^4 = 17\,296$„.

— Oare ce-ar fi zis Fermat dacă i s-ar fi arătat formulele pe care le-am scris noi, aici?

— Nu cred că l-ar fi încîntat ca pe noi. Aceste formule i s-ar fi părut, poate, mai greoaie decît metoda folosită de el, fiindcă el era deprins să gîndească după tiparul lui de atunci şi ar fi avut nevoie de adaptare ca să treacă la al nostru. Ţi-am povestit cîndva cazul lui Huygens. Deşi prieten cu Leibniz, el nu s-a putut adapta la condiţiile noi ale analizei infinitezimale şi a continuat să gîndească şi să creeze, aşa cum se obişnuise, deşi concepţiile noi l-au interesat şi nu i-au rămas străine.

— Mi-ai spus că, doi ani mai tîrziu, Descartes a descoperit şi el o nouă pereche de numere prietene. Cred că cel puţin el a stabilit formulele lui Tabit, fiindcă ştiu că el a dat algebrei forma modernă şi a folosit notaţia exponenţială.

— Iată că nu! Printre scrisorile prin care-i comunică lui Mersenne numerele prietene găsite de el, se află una în care arată că-i uimit de faptul că Fermat a folosit exact acelaşi procedeu care l-a condus şi pe el la numerele

$A = 2^7 . 191 . 383 = 9\,363\,584$ şi $B = 2^7 . 73\,727 = 9\,437\,056$

În anul 1644, cînd Mersenne a publicat *Cogitata*, el a adus la cunoştinţa publicului aceste două perechi noi de numere prietene, fără a arăta cum au fost descoperite.

— Spui că Mersenne a tipărit cartea sa în 1644, dar Fermat făcuse descoperirea cu 8 ani mai devreme, iar Descartes cu 6...

— Şi ce-i cu asta? Judeci după *azi* şi nu după *atunci!* În secolul al XVII-lea, opt, zece şi chiar douăzeci de ani nu aveau lungimea celor de azi!

— Poate că ai dreptate. Îmi vin în minte diferite exemple care mă fac să nu mai insist. Revenind la problema noastră, aş vrea să observ că dacă numerele stabilite de Descartes sînt de ordinul milioanelor şi corespund la valoarea $n=7$ din formula lui Tabit, ar urma că perechea următoare se va afla undeva printre bilioane sau trilioane?

— Îmi pare rău că iar trebuie să-ţi spun *nu!* Prin această formulă nu s-au mai putut găsi alte perechi de numere prietene pentru nici o valoare a lui $n<200$!

— Atunci s-a isprăvit cu ele? Aşadar, printre numere sînt mai puţine exemple de prietenii decît printre oameni!

— S-ar putea să nu te grăbeşti? De unde ai scos tu că formula lui Tabit ar fi fiind singura cale către numerele prietene? Oare îţi închipui că Euler, despre care Arago spunea că

„el calculează așa cum oamenii respiră și vulturii planează în vînt" a lăsat să treacă pe lîngă el o asemenea nadă fără să se prindă în ea? Dintr-o răsuflare el a dat la iveală 30 de perechi de numere prietene!

— Asta-i prea de tot! Nu glumești? Chiar 30 de perechi noi-nouțe de numere prietene? Și a arătat cum a procedat?

— Atunci, în 1747, cînd a publicat articolul intitulat *Despre numerele prietene*, s-a mărginit să amintească cele trei perechi cunoscute și a adăugat perechile calculate de el, dintre care prima este,: $A = 2^2 . 23 . 5 . 137$, $B = 2^2 . 23 \cdot 827$ iar ultima $A = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179$ $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 359$. Peste trei ani a scris o broșură cu același titlu, în care a stabilit teoria numerelor prietene, dar această lucrare a rămas în manuscris și nu s-a găsit decît după moartea lui, atunci cînd au fost cercetate lucrările sale postume, pentru a fi publicată întreaga operă a lui Euler. Broșura a apărut în volumul I din opere complete *Commentationes Aritmeticae*, în 1915. Acolo, la pagina 86, am găsit și am citit această lucrare a lui Euler și am constatat atunci că Euler era cam slab la istoria matematicilor deși știa *Odiseea* și *Eneida* pe de rost!

— Îmi închipui satisfacția ta. Hai povestește-mi ce cusur i-ai găsit marelui Euler?

— Cusur? Nu pot pronunța acest cuvînt cînd vorbesc de Euler, el rămîne pentru mine un zeu și zeii nu au cusururi. Ei pot însă rămîne indiferenți față de datele istoriei pe care oamenii de rînd o cercetează cu migală. Astfel am găsit că Euler credea că M. Stiefel era acela care a prezentat numerele prietene pentru prima oară. El scrie că perechea 220, 284 se află în *Aritmetica integra* publicată de acesta la Nürenberg în 1544. Așadar, nici tu Pitagora, nici tu Iamblic nici tu Fermat! Singur Descartes este amintit ca autor al ultimei din cele trei perechi. Despre Tabit ibn Korra nici nu aș fi avut pretenția să-l pomenească fiindcă lucrările lui au fost cercetate și discutate abia în secolul al XIX-lea, dar despre Pitagora și Fermat—de! — ar fi fost cazul.

— Ei, acum după ce ți-ai vărsat năduful, aștept să-mi arăți metoda stabilită de Euler, dacă este destul de simplă ca să o pot înțelege și eu.

— În privința asta, ca să-ți fac plăcere, te pot încredința că ai fi fost și tu în stare să o descoperi, dacă ai fi dorit-o cu adevărat!

— Lasă ironiile și treci la fapte!



Leonhard Euler

— Nu voi urma chiar metoda lui Euler, fiindcă atunci s-ar întîmpla ca şi cu teorema a 36-a a lui Euclid. De aceea voi folosi prelucrarea lui Escott, din articolul despre care ţi-am vorbit. El ne va călăuzi, de aici înainte, în tot ce vei afla despre numerele prietene. Acest articol l-am tradus şi se află în întregime în caietul de pe masă. Aşadar, să luăm creioane şi hîrtie şi să începem notînd cum o face Escott, cu m şi n cele două numere prietene şi cu $S(m)$ şi $S(n)$ suma tuturor divizorilor lor între care este inclus şi numărul însuşi. În acest caz, scăzînd numărul însuşi proprietatea numerelor prietene şi exprimă prin formulele : (1) $S(m)-m=n$ şi $S(n)-n=m$. De aici rezultă relaţia : (2) $S(m)=S(n)$.

— Ia stai mata oleacă ! Dacă $m=n$, oare relaţia (1) nu dă tocmai condiţia ca un număr să fie perfect ?

— Da ! Faptul a fost remarcat şi de Euler, numai că practic aceasta nu poate ajuta la nimic. Problema care se pune este să exprimi numerele m şi n cu ajutorul factorilor primi din care sînt formaţi.

— Vezi, aici este ceea ce deosebeşte omul de rînd de geniu ! Probabil că Euler a găsit răspunsul cel bun.

— Sigur că da ! El a considerat că unul (sau mai mulţi) dintre factorii care formează cele două numere poate fi acelaşi şi l-a notat cu E, iar ceilalţi factori, care neapărat trebuie să fie primi şi să se deosebească în cele două numere, i-a notat cu $p, q, r, s, t, \ldots$ Folosind aceste observaţii, cu notaţiile de mai sus, avem :

$$m=E\cdot p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot \ldots \text{ iar } n=E\cdot t\cdot u\cdot v\cdot \ldots$$

— Nu observi că acest număr E apărea și în formula lui Tabit ? Anume, în prima pereche $E=2^2$, în a doua $E=2^4$ iar în a treia $E=2^7$. Poate că Euler a observat acest lucru și l-a generalizat ! Dar asta nu înseamnă încă nimic, niște notații și atîta tot. Vreau să înțeleg cum se poate trece de la aceste notații la dezlegarea problemei ? Aici e geniu !

— Euler a folosit o prea frumoasă teoremă din teoria numerelor, în care se arată că, dacă un număr natural N este compus și are forma $N=p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \ldots \cdot t^f$, atunci suma divizorilor lui este dată de formula :

$$(3)\quad S(N)=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\cdot\ldots\cdot\frac{t^{f+1}-1}{f-1}.$$

— Exact de ceea ce avem nevoie ! Îmi dau seama că mi-ai dat cheia în mînă, dar nu văd lacătul !

— Nu te necăji, căci l-a văzut Euler, măcar că ochii lui nu-l mai ajutau. Astfel, el a ales numerele N, care să formeze perechile prietene în așa fel ca formulele (3) să apară în forme simple, ușor de mînuit. Aceste forme le-a grupat în următoarele cinci moduri, pe care le vom nota folosind notațiile convenite :

1. $m=E\cdot p\cdot q$; $n=E\cdot r$ sau notate împreună : E^{pq}_{r}.
2. $m=E\cdot p\cdot q$; $n=E\cdot t\cdot s$ sau notate împreună : E^{pq}_{ts}.

(T) 3. $m=E\cdot p\cdot q\cdot r$; $n=E\cdot t\cdot s$ sau notate împreună E^{pqr}_{ts}

4. $m=E\cdot p\cdot q\cdot r$; $n=E\cdot t\cdot s\cdot v$ sau notate împreunăE^{pqr}_{tsv}.
5. $m=E\cdot p\cdot q\cdot r\cdot s$; $n=E\cdot t\cdot u\cdot v$ sau notate îmreună : E^{pqrs}_{tuv}.

— Vrei să spui că trebuie să folosim formula (3) ca să punem în evidență suma divizorilor, în fiecare din cele 5 cazuri ?

— Exact ! Pe E îl considerăm separat, ca un produs și ne referim la ceilalți factori, așadar, în primul caz, avem :

$$S(m)=S(E)\frac{p^2-1}{r-1}\cdot\frac{q^2-1}{q-1}=S(E)(p+1)(q+1) \text{ și la fel :}$$

$$S(n)=S(E)\frac{r^2-1}{r-1}=S(E)(r+1).$$

— Aceste valori ale lui m, n, $S(m)$ și $S(n)$ trebuie înlocuite în (1) și (2). Făcînd reducerile se ajunge la formulele :

$$(4)\qquad S(E)(p+1)(q+1)=E(pq+r) \text{ și}$$

(5) $$(p+1)(q+1)=r+1.$$

— Am dat peste un sistem de 2 ecuații cu trei necunoscute, care se cere rezolvat în numere întregi, prime, diferite între ele și să nu fie divizibile cu E. Am putea elimina una dintre necunoscute, de pildă pe r, $r=pq+p+q$, a cărui valoare apare ușor din (5). Înlocuind în (4) ne rămîne ecuația:

(6) $$S(E)(p+1)(q+1)=E(2pq+p+q).$$

— Interesant, numai că mă uit cu teamă la această ecuație! Mai întîi pentru că acest $S(E)$ mă îngheață, nu alta!

— Dar el e cel mai simpatic. Ai voie să-l alegi cum vrei tu. De pildă, Euler l-a ales pe E de forma $E=2^u$ și, prin urmare, din (3) rezultă $S(E)=2^{u-1}-1$.

— Vezi, la asta nu m-am gîndit, dar acum cînd mi-ai arătat, totul pare așa de simplu! Atunci să înlocuiesc în (6) și să fac reducerile:

(7) $$2^{u+1}-1=pq-(2^u-1)(p+q).$$

— Ai lucrat bine, dar acum e nevoie să intervin eu, fiindcă am citit lucrarea mai înainte și nu fiindcă m-aș pricepe mai bine. Ecuația (7) se poate transforma în alta, mai ușor de rezolvat. Pentru aceasta vom opera asupra lui $2^{u+1}=2\cdot 2^u$ care sugerează că ar putea fi considerat drept termenul din mijloc al binomului (2^u-1) din membrul al doilea. E de ajuns să adunăm și să scădem pe 2^{2u}. Astfel avem:

$$2^{2u}-(2^u-1)^2=pq-(2^u-1)(p+q).$$

— Acum știu cum procedez mai departe. Trec binomul la pătrat în membrul al doilea și scot factor comun pe 2^{u-1}.

— Nu-i chiar așa de simplu, fiindcă tot acolo mai ai și produsul pq care-ți rămîne stingher, ori tu trebuie să ajungi să ai și în membrul al doilea un produs de doi factori. Numai atunci ecuația se poate descompune.

— Atunci ce să fac?

— Treci pătratul, așa cum ai spus, în membrul al doilea, dar totodată faci și înmulțirile cu p și q, adică:

$$2^{2u}=(2^u-1)^2-(2^u-1)p-(2^u-1)q+pq.$$

— Parcă aș îndrăzni să duc calculele mai departe: se pare că, grupînd, pe de o parte, primii doi factori și apoi ultimii doi, se alege un factor comun. Uite cum procedez:

$2^{2u} = -(2^u-1)(p-(2^u-1)) + q(p-(2^u-1))$ și pe aici:

$2^{2u} = (p-(2^u-1))(q-(2^u-1))$ și deci (7) apare ca un produs!

— E adevărat, dar ecuația aceasta trebuie să o mai pieptănăm oleacă. Punem: $2u = u-k+u+k$, de unde 2^{2u} se transformă în $2^{u-k} \cdot 2^{u+k}$ și deci, descompusă în factori, ecuația (7) se poate scrie:

(8) $2^{u-k} = p-(2^u-1)$ și $2^{u+k} = q-(2^u-1)$, iar de aici rezultă:

(9) $p = 2^{u-k} + 2^u - 1 = 2^{u-k}(2^k+1) - 1$ și

$q = 2^{u+k} + 2^u - 1 = 2^u(2^k+1) - 1.$

Deducem valoarea lui r:

$$r = 2^{2u-k}(2^k+1)^2 - 1.$$

Așadar, problema este rezolvată, cel puțin în principiu. Dacă p, q, r sînt numere prime, atunci condiția (1) din (T) conduce la numere prietene de forma:

(10) $$m = 2^u \cdot p \cdot q \text{ iar } n = 2^u \cdot r.$$

Euler a observat că, pentru $k=1$, formulele (9) devin:

$$p = 3 \cdot 2^{u-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^u - 1 \text{ și } r = 9 \cdot 2^{2u-1} - 1.$$

Dar acestea sînt tocmai formulele lui Tabit ibn Korra!

— Adevărat, însă formulele găsite de Euler sînt cu mult mai generale și din ele se pot deduce și alte perechi de numere prietene. Chiar și în acest prim caz, din (T), Euler nu s-a mărginit numai la factorul E de forma 2^u, ci a considerat și cazul $E = 2^u \cdot f$, unde $f = 2^{n+1} + e$ este un număr prim. Refăcînd calculele pe care le-am stabilit noi, el a găsit perechea: $m = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$ și $n = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$ sau, într-o formă concentrată: $2^2 \cdot 23 . \begin{cases} 5 \cdot 137 \\ 827 \end{cases}$ pe care am scris-o la un loc. O altă pereche, care se încadrează în aceeași formulă, a fost calculată pentru $E = 2^u(g-1)(h-1)$, ultimii doi factori fiind primi. Astfel, Euler a mai descoperit perechea: $2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \begin{cases} 389 \cdot 509 \\ 198 \cdot 899 \end{cases}$. Acum cred că ai înțeles cum se procedează și atunci cînd ar fi de stabilit perechile de numere prietene care corespund formelor 2, 3, 4 și 5 din tabloul (T).

— De înțeles am înțeles, dar cînd mă gîndesc la ce fel de calcule trebuie să faci față ... fiindcă de fiecare dată numărul

necunoscutelor se mărește cu cîte o unitate, iar ecuațiile ce rezultă trebuie să fie mult mai complicate.

— Asta-i așa, dar tocmai aici e farmecul. De altfel, mi se pare că am uitat să-ți spun că, în ultima lui lucrare, Euler a mai adăugat alte 31 de perechi de numere prietene la cele 30 calculate anterior. Dintre acestea numai 29 au fost găsite mai tîrziu valabile, așa că Euler are la activul său 59 de perechi de numere prietene. În articolul lui Escott se găsește următorul tablou, în care sînt înscrise, în ordine cronologică, numele descoperitorilor, numărul perechilor de numere prietene și, cu aproximație, anul descoperirilor pînă în 1943. Uite îl am aici și ai să vezi din el multe lucruri interesante :

Pitagora	1 (540 î.e.n.)
Fermat	1 (1636)
Descartes	1 (1638)
Euler	59 (1747—50)
Legendre	1 (1830)
B.N.I. Paganini	1 (1867)
P. Seelhoff	2 (1884)
L.E. Dickson	2 (1911)
T.E. Mason	14 (1921)
P. Poulet	65 (1929)
A. Gerardin	5 (1929)
E.B. Escott	233 (1934)
B.H. Brown	1 (1939)
Poulet și Gerardin	4 (1939)
Total	390

— Așadar, autorul articolului a calculat 233 de perechi. Acesta zic și eu că-i record, bădie Teodor !

— Dar să nu uităm contribuția mașinilor de calcul. De altfel, Escott face și următoarea observație : pînă la începutul secolului al XX-lea au fost găsite 66 de perechi, celelalte 324 de perechi sînt calculate în secolul nostru și cele mai multe după 1921. Tot în acest articol se găsesc perechile de numere prietene, grupate după formulele care le caracterizează. Un rezultat îl ai aici în față :

După formula E_r^{pq} : 33 de perechi. Aici, alături de primele trei se află 13 perechi calculate de Euler, din care :

$$3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \begin{cases} 41 \cdot 461 \\ 19 \cdot 403 \end{cases} \text{ sau } 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 211 \\ 2\,543, \end{cases}$$

alte 10 calculate de Escott, dintre care am ales iar două : $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 107 \cdot \begin{cases} 3\,209 \cdot 4\,492 \\ 14\,425\,739 \end{cases}$ și $3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 271 \cdot \begin{cases} 179 \cdot 5\,419 \\ 975599 \end{cases}$, iar restul de diverși autori, printre care am ales perechea găsită de Legendre în 1830 : $2^8 \cdot \begin{cases} 257 \cdot 33023 \\ 8\,520191 \end{cases}$, în cinstirea faptului că Teoria numerelor numără printre cărțile ei fundamentale tratatul său, publicat la Paris, în 1797, sub titlul *Essai sur la théorie des nombres.*

După formula E_s^{bqr} : 7 perechi, toate ale lui Escott. Iată una :

$$2^4 \cdot \begin{cases} 17 \cdot 167 \cdot 709 \\ 2\,147\,039 \end{cases}.$$

După formula E_{rs}^{pq} : 101 de perechi, dintre care Euler are 27. Am ales pe cele mai simple :

$$2^2 \cdot \begin{cases} 5 \cdot 131 \\ 17 \cdot 43 \end{cases} \text{ și } 3^3 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 7 \cdot 71 \\ 17 \cdot 31 \end{cases}.$$

Escott a calculat 35 ; iată prima și ultima din seria lui :

$$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \begin{cases} 52 \cdot 1\,759 \\ 59 \cdot 1\,583 \end{cases} \text{ și } 3^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 3229 \cdot \begin{cases} 53 \cdot 774\,959 \\ 179 \cdot 232\,487 \end{cases}.$$

Celelalte aparțin autorilor pe care i-ai văzut în primul tablou. *După formula* E_{st}^{pqr} : 294 de perechi. Euler a calculat 17 perechi, din care :

$$2 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 7 \cdot 60\,659 \end{cases} \text{ sau } 3^3 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 17 \cdot 23 \cdot 397 \\ 7 \cdot 21\,491 \end{cases}.$$

Poulet a stabilit 27 de perechi. În afară de două, în care $E = 2 \cdot 7 \cdot 11$, toate celelalte au $E = 2^4$. Iată, de pildă, o pereche:

$$2^4 \cdot \begin{cases} 59 \cdot 359 \cdot 683 \\ 23 \cdot 615\,599 \end{cases}.$$

Escott deține majoritatea, cu 140 de perechi, începînd cu

$$2 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 7 \cdot 11 \cdot 11\,369 \\ 757 \cdot 1\,439 \end{cases} \text{ și terminînd cu :}$$

$$3^{10} \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3\,851 \cdot \begin{cases} 61\,559 \cdot 565 \cdot 247 \\ 359 \cdot 911 \cdot 105\,983 \end{cases}.$$

După formula E_{stu}^{pqr} : Euler a calculat o singură pereche :

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 59 \cdot 179 \\ 17 \cdot 19 \cdot 359 \end{cases}$$

iar Escott 21, aşadar, în total 22 de perechi. Iată şi o pereche stabilită de Escott: $3^6 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093 \cdot \begin{cases} 19 \cdot 4643 \cdot 35\,831 \\ 29 \cdot 47 \cdot 2\,311\,163 \end{cases}$

— Frumuşele numere, ce spui mata, bădie ? Ştiu bine că nu te-ai fi încumetat să le scrii cu atîta îngrijire, dacă nu ţi-ar fi mîngîiat sufletul ! Taci şi ridici din sprînceană ! Bine, spune mai departe.

— Iaca spun ! *După formula* E_{iu}^{pqrs}: Escott singur a calculat 14 perechi, toate avînd ca factor comun pe 2^3. Iată o mostră:

$$2^3 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 264\,599 \\ 37\,799 \cdot 201\,599 \end{cases}$$

După formula E_{iuv}^{pqrs}: numai Mason a calculat două perechi, anume :

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot \begin{cases} 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 59 \\ 19 \cdot 131 \cdot 1\,259 \end{cases} \text{ şi } 3^3 \cdot 5^3 \cdot \begin{cases} 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 59 \\ 19 \cdot 131 \cdot 1\,259 \end{cases}.$$

Au mai rămas 17 perechi care nu pot fi încadrate în grupele stabilite teoretic de Euler. Printre acestea se află şi perechea pe care a găsit-o Paganini la vîrsta de 16 ani, fără a arăta metoda :

$$A=2^5 \cdot 37\ ;\ B=2 \cdot 5 \cdot 11^2$$

sau două perechi ale lui Euler: $A=2^3 \cdot 19 \cdot 41$; $B=2^5 \cdot 199$ şi $A=2^3 \cdot 41 \cdot 467$; $B=2^5 \cdot 19 \cdot 233$, şase perechi ale lui Escott dintre care iată o nostimă uriaşă :

$A=2^3 \cdot 13 \cdot 157 \cdot 3\,277\,869$ şi $B=2^5 \cdot 14\,051 \cdot 130\,349$. Dintre acestea mi-a plăcut, cel mai mult, această simplă şi drăguţă pereche a lui Brown: $A=3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ şi $B=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139$.

— Cred că prietenul matale, cel cu hîrtiuţa, ar zice revoltat : „Ca să vezi cu ce găsesc oamenii să-şi bată capul ! Eu însă mă întreb ce ar fi simţit Pitagora dacă, prin absurd, l-ar fi străfulgerat gîndul că această inspiraţie a lui, de a alege două numere ca simbol al prieteniei dintre doi oameni, se va transforma într-o problemă a cărei dezlegare va fi căutată, veacuri de-a rîndul, cu rîvnă şi entuziasm de către cei mai de seamă matematicieni, de atunci şi pînă în zilele noastre, fără a fi găsit soluţia definitivă ?

— La întrebarea ta, prietenul nostru cu hîrtiuţa cred că ar răspunde fără ezitare : — De ! — parcă degeaba spune

proverbul că un nebun aruncă o piatră în apă și zece înțelepți nu pot să o scoată ? Iar la observația pe care tu spui că ar fi făcut-o, tot el, dacă ar fi fost de față, aș fi răspuns cam așa : „Istoria matematicilor cunoaște destule probleme care au avut la început un caracter pur teoretic și nimeni nu bănuia, pe cînd le cerceta, că ar putea găsi vreo aplicație practică. Și deodată, un om cu vederi de geniu, găsește că acea problemă teoretică, rezolvată numai dintr-o plăcere și curiozitate științifică, poate fi privită drept modelul ideal al unei probleme practice ce-și căuta, fără să găsească, soluția ! Aceste probleme teoretice sînt ca piatra, varul, fierul pe care alții le pregătesc și care așteaptă arhitectul care să le folosească la locul și timpul potrivit. Și dacă vrei, uite, mi-a venit acum în minte un exemplu clasic, acela al secțiunilor conice studiate în antichitate din punct de vedere pur teoretic. Printre alții, Arhimede și Apollonios, — secolul III î.e.n. — le-au îndrăgit într-atîta încît, aceste două genii ale poporului grec, au ajuns să se urască unul pe altul, din gelozie că unul a descoperit și el ceea ce găsise celălalt și a publicat înaintea lui rezultatele ! Căci, numele lui Apollonios rămîne legat de acela al conicelor, datorită *Secțiunilor conice* care ne-au rămas de la el. Peste 19 veacuri, cam pe la începutul secolului al XVII-lea, se naște un geniu, cu numele de Kepler, care cunoștea bine matematica greacă și o admira, dar mai cunoștea și astronomie pe care, de asemenea, o admira și deodată, așa, printr-o sclipire genială a înțeles că măsurătorile pe care le făcuse cu migală timp de ani îndelungați Tycho Brahe, se încadrează exact în ipoteza că drumul Pămîntului în jurul Soarelui are ca model o elipsă, în care Soarele se află în unul dintre focare ! Nu-i exclus deci ca, într-o bună zi, cineva să spună, dacă nu cumva a și spus, că perechea de numere prietene poate fi modelul cutărei probleme de natură practică. Atunci, acel cineva va avea gata calculat tabloul cu perechile de numere din care îi va rămîne să aleagă ce-i va conveni !

— Îmi pare bine că așa i-ai răspunde amicului cu hîrtiuța. În schimb, mi-a venit mie în gînd o întrebare, la care nu știu dacă te vei descurca cu aceeași vervă ! Permiți să ți-o pun ?

— Nu-s sperios din fire, așa că aștept.

— Asta fiindcă ai adus tu vorba despre modele și geometrie. Vezi, teoria numerelor a putut găsi un model al prieteniei, plastic și sugestiv, geometria în schimb nu prea cred

că s-ar putea făli că poate face ceva asemănător, oricît ar fi ei geometrii de intuitivi !

— Spune, într-adevăr crezi aceasta ? Ei bine, află că tocmai elipsa, despre care ți-am vorbit adineauri, are și proprietatea de a fi un model pentru prietenie. Un matematician francez de la începutul secolului nostru, pe nume H. Renaud, scria cam așa : „Elipsa are două focare și orice rază care pornește din unul se reflectă în celălalt, imagine exactă a ceea ce se petrece între două inimi unite prin prietenie sau prin dragoste". Ai avea, cumva, ceva de obiectat ?

PROBLEMA ABSTRACŢIEI ÎN MATEMATICĂ

— Dacă n-ar fi ploicica asta, te-aş îndemna să colinzi pădurea, măcar aşa de unul singur, mi-a spus prietenul meu, îndată după prînzişor.

— Şi nu cumva, fiindcă nu poţi face abstracţie de ploaie, te simţi obligat să-mi vorbeşti despre abstracţia în matematici ? — l-am zeflemisit, încercînd să ascund durerea pricinuită de starea sănătăţii lui.

— De data asta, ai nimerit în plin — mi-a răspuns rîzînd de-a binelea Teodor Solonar. Se vede că mi-ai captat gîndurile, prin cine ştie ce minuscul dispozitiv de radio, ascuns undeva printre circumvoluţiunile creierului tău !

— Care va să zică, matale bădie, ţi-i a vorbi în bobote ?

— Nicidecum ! Vorbesc foarte serios !

— Cum să te iau în serios ? Aristotel însuşi a afirmat că „matematica este ştiinţă abstractă *prin excelenţă*, iar matale eşti hotărît să-mi vorbeşti, taman despre *abstracţia în matematici*, nu ? Şi eu, să te iau în serios ? Ce face ea, mă rog, cît îi ziulica de mare decît să abstracţioneze ? Oare ar putea exista vreo problemă de matematici în care să nu fi intervenit şi abstracţia ?

— Ei, tocmai aici e problema ! Nu te-ai întrebat niciodată cum se face că, deşi matematica abstractizează, cît îi ziulica de mare, cum zici tu, în atîtea mii de ani, nu şi-a terminat treaba şi nu a devenit o ştiinţă moartă precum latina ? De ce pe zi ce trece, ea întinereşte şi e mereu mai proaspătă ? De pildă, pe la sfîrşitul secolului al XVIII-lea, un mare matematician ca J. L. Lagrange se plîngea, — într-o scrisoare către d'Alembert — că în curînd „mina geometriei va trebui părăsită, dacă nu se vor găsi filoane noi, iar catedrele de geometrie vor deveni tot aşa de rare ca şi acelea de limbi moarte ! Aceasta la sfîrşitul secolului al XVIII-lea, dar la începutul secolului al


Joseph Louis Lagrange

XIX-lea geometria se înfățișa renăscută din propria ei cenușă și, de atunci, n-a mai dat nici un semn de oboseală !

— Bine, bădiță dragă, dacă mata vrei să privești procesul de abstractizare ca pe un elixir, ca pe un secret al tinereții veșnice, atunci află că de-ai străbate pămîntul în lung și în lat, n-ai să găsești un alt ascultător mai atent.

— Nu-i nevoie să-mi spui, că știu eu cu cine am de-a face ! Greu e numai pînă ce te dau pe brazdă ! Să știi că de mult doresc să cercetăm amîndoi această problemă, așa pe-ndelete, fiindcă amîndoi cunoaștem cîte o fațetă a ei și numai discutînd am putea orîndui lucrurile așa cum trebuie !

— Atunci, fiindcă-i vorbă serioasă, pot să-ți mărturisesc că și eu tînjeam după ajutorul tău, pe cînd încercam să înnod realitatea de noțiunile abstrase din ea, citind *Metafizica* sau *Analiticele* lui Aristotel. Îmi ziceam însă că tu, care pornești automat de la noțiunile abstracte ca să mergi cu ele mai departe, n-ai să mai zăbovești, să cauți cum s-a ajuns la ele !

— Iată, măi Toa, la ce m-am gîndit — am început eu discuția după cîteva sorbituri de cafea. Fiindcă nu poate exista vreun proces de gîndire logică în care să se evite abstractizarea, hai să pornim chiar de la faptul că abstracția este operația logică *ce se aplică* în orice știință și că, după spusa lui Aristotel, „a abstrage înseamnă a descoperi universalul în individual".

Jean Le Rond
D'Alembert



— E bine că ţi-ai amintit şi de acest aspect al procesului de abstractizare, proces care în realitate se prezintă sub forme destul de variate. Prima formă a fost aceea pe care am remarcat-o la început, *aceea de izolare* a unei calităţi adică, de a scoate o parte dintr-un întreg. Ea se arată ca rezultat al unei analize şi de aceea este denumită *abstracţie analitică* sau formală, pe cînd aceasta din urmă apare ca rezultat *al inducţiei*, este deci o *abstracţie generalizatoare* sau *de identificare* !

— Îmi mai aduc aminte şi de faptul că am citit cîndva, în *Dialectica naturii*, această observaţie a lui Engels : „Empiristul este aşa de obişnuit să cerceteze lucrurile în mod experiemental încît şi atunci cînd operează cu abstracţii se crede în domeniul cunoaşterii senzoriale".

— E adevărat. În orice ştiinţă intervine, într-un anumit procent, şi procesul de abstractizare, dar în matematici acest procent atinge valoarea maximă, adică „sută la sută". De aici rezultă, ca o consecinţă logică, natura ei speculativă, întregul tezaur al matematicienilor fiind compus din raţionamentele logice provenite din definirea noţiunilor supuse cîteodată şi unor axiome fundamentale. Matematica modernă are însă, tot ca urmare a procesului de abstractizare, şi un caracter constructiv. Mai clar decît mine, îţi va explica aceasta *Micul dicţionar filozofic*[1]. Uite-l în raftul al doilea. Te rog, pune-l aici pe masă şi citeşte articolele despre abstractizare şi abstracţie.

[1] *Mic dicţionar filozofic.* Ed. II, Editura Politică, Bucureşti, 1973.

Am ascultat îndemnul prietenului meu şi apoi i-am zis :

— O parte din cele ce am găsit la „abstracţie" îmi erau bine cunoscute din lucrările lui Aristotel şi ale altora dintre cei ce i-au urmat. De pildă acestea : „în raport cu modalităţile de abstractizare se pot întîlni diferite tipuri de abstracţie în ştiinţă şi în cunoaştere în general; *abstracţii empirice*, de exemplu, noţiunile empirice, produse de abstractizarea analitică (numită şi conceptuală sau aristotelică), realizată prin abstragerea notelor comune, degajate prin analiza şi compararea obiectelor şi proceselor concrete, sau a unor alte noţiuni". Cu alte cuvinte, aceasta se face că, printr-o calitate comună şi făcîndu-se abstracţie de toate celelalte aspecte, pot fi reunite obiecte sau fenomene cu totul diferite între ele. Mi-amintesc iar de un exemplu, dat de Hegel şi citat de Engels, în legătură cu cuvîntul abstract *fructe* : „Poţi mînca mere, pere, dar niciodată fructe" !

— Aşa ? Dar parcă ieri mi-am spus că te duci la piaţă ca să cumperi fructe ?

— Ai dreptate, dar ţi-am adus mere ! Aşa că nu mă tachina şi tu, tocmai cînd am ajuns la ananghie căci, urmărind mai departe articolul despre abstracţie, am dat peste alt tip de abstracţii, „*abstracţiile constructive* de exemplu, noţiunile teoretice, obţinute prin abstractizarea constructivă sau idealizantă (combinată cu cea analitică) !"

— Şi asta te-a speriat ?

— Ai ghicit, iar dacă ai să izbuteşti să mă faci să înţeleg ce vrea să fie abstracţia asta constructivă...

— Vom încerca să facem ce-om putea ! Te fac numai atent că aici vom da peste probleme delicate asupra structurilor matematice, unde lucrurile se petrec oarecum altfel decît în capitolele care se bazează pe procedeele de abstracţie cu care eram deprinşi noi, în tinereţele noastre ! Acelea s-au cam învechit, după cum ai citit, acum ele poartă şi un nume specific : *abstracţii empirice* sau *analitice* ! Azi accentul se pune pe *abstracţiile constructive* fiindcă, aşa cum le arată numele, prin ele se stabilesc construcţii noi în domeniul matematicilor, bazate pe posibilitatea de a stabili relaţii noi, pur formale, furnizate de noua logică a relaţiilor.

— Logica relaţiilor zici ? Atunci încă un termen nou pentru mine şi Aristotel !

— N-ai de ce te speria ! E pur şi simplu denumirea capitolului din logică, în care se analizează, sub formă matematică, proprietăţile formale ale relaţiilor. Să numim, de exemplu,

cu x şi cu y cei doi termeni caracteristici ai unei relaţii date, pe care o notăm cu litera R. Aplicînd metodele curente în teoria mulţimilor, structura logică a acestei relaţii se scrie sub forma $R(x, y)$ sau încă xRy unde x şi y păstrează ordinea stabilită de relaţie, primul termen, x, fiind *antecesorul*, iar cel de al doilea y, *succesorul*. Ca *domeniu* al relaţiei R se consideră mulţimea elementelor x, iar drept *codomeniu*, mulţimea elementelor y. Logica relaţiilor efectuează toate operaţiile ce se pot face între elementele x şi y ale acestor două mulţimi şi analizează proprietăţile ce decurg din ele !

— Aha ! Acum bănuiesc eu ce-a vrut să spună H. Bergson cînd scria că : „ştiinţa modernă se bazează pe legi, adică pe relaţii" ! În aceste cîteva cuvinte el punea în evidenţă faptul că, spre deosebire de ştiinţa antică, ce se baza pe *concepte*, ştiinţa modernă caută relaţiile ce pot fi stabilite între mărimile variabile. Dar dacă te gîndeşti mai bine, trebuie să recunoşti că nimic nu-i nou sub Soare ! Oare Platon nu a scris şi el despre relaţiile matematice, sau fizice, sau morale ?

— N-am să mă amestec eu acum în revendicările tale de prioritate cu privire la Platon şi cred că ai să renunţi şi tu la ele cînd îţi voi preciza că gîndirea contemporană însăşi este relaţionistă şi asta înseamnă altceva decît clasificare şi specificare, înseamnă ceva ce depăşeşte procesul prin care se stabilea raportul dintre individ şi specie, sau dintre specie şi gen înseamnă descoperirea relaţiilor, din ce în ce mai complexe, dintre elementele în cauză. Logica relaţiilor, adică a predicatelor, se opune logicii clasice, a subiectelor. De aceea, ceea ce se înţelege azi prin *gîndire abstractă* este altceva decît ceea ce consideram noi pe vremuri, fiindcă nu mai este gîndirea inductivă bazată pe procedeele de abstracţie empirică sau *analitică* !

— Se poate, dar nu-mi închipui că această abstracţie constructivă a căzut din cer. Sînt convins că şi aceasta s-a dezvoltat bazîndu-se pe rezultatele obţinute prin vechile procedee ! De la acelea aş vrea eu să pornim, ca să-mi arăţi cum s-au decantat noţiunile abstracte cu care, aidoma unor cărămizi, s-a zidit în timp de multe, multe milenii, clădirea aceasta minunată ce poartă numele de MATEMATICĂ.

— Doar nu-mi vei cere să stabilesc cîte observaţii ale strămoşilor, cîte constatări sau deprinderi, transmise din generaţie în generaţie prin ereditate, au contribuit ca să se ajungă

la noţiunea de număr, de formă geometrică, de măsură a unei lungimi a unei arii sau a unui volum ?

— Ba da ! Dacă facem o treabă, atunci să o facem cumsecade! Coboară-mă, te rog, cu ascensorul veacurilor, pînă la treapta cea mai de jos posibil, pînă la aceea pe care a atins-o şi poetul nostru drag, prin versurile :

„Îţi ridicaseşi capul de jos, chemat de Soare
Şi începu îndată şi cugetul să-ţi zboare".

De acolo, vreau să urc alături de tine, *per pedes apostolorum*, atît cît mă vor ţine picioarele ! Spun aşa, fiindcă, după cum vezi, capul stă bine pe umeri ! Cam la ce adîncime bănuieşti că am putea da peste cel ce a avut întîia oară intuiţia spaţiului ?

— Visezi ca un poet, întrebi ca un poet şi ai pretenţia să-ţi răspund ca un om de ştiinţă ? Imposibil ! Un milion de ani înseamnă 10 000 de veacuri sau 1 000 de milenii, iar zilele trecute am citit că un antropolog american a descoperit în Etiopia oseminte omeneşti pietrificate de acum vreo trei milioane de ani. Or, *intuiţia spaţială*, ca şi aceea de *număr* sau mai bine zis de *mulţime*, a străfulgerat mintea omului mai înainte ca el să-şi fi ridicat „capul de jos, chemat de Soare", fiindcă aceste noţiuni nu le are numai omul, ci şi animalul. Probabil că s-au format datorită faptului că atît omul cît şi animalul se mişcau, din loc în loc, cu o anumită viteză, şi aşa au avut posibilitatea să distingă obiectele din jurul lor, să deosebească linia dreaptă de cea curbă şi să aprecieze distanţa ce separă două obiecte.

— Asta se poate fiindcă nu numai omul, dar şi animalele, ce se orientează prin văz, merg în linie dreaptă. De altfel, cred că, dintre toate simţurile, vederea a fost aceea care a avut rolul principal în dezvoltarea noţiunilor matematice, ca aceea de spaţiu.

— Ştiu eu dacă numai vederea ? Bubuitul tunetului, foşnetul frunzelor sau susurul unui izvor, adică auzul, ori pipăitul crengilor pe care trebuia să le atingă cînd le rupea, să nu fi avut nici un rol la fixarea intuiţiei spaţiale ? În introducerea la *Cursul de geometrie proiectivă*, publicat de Federigo Enriques, în 1930, autorul insistă asupra faptului că pot fi deosebite două categorii de proprietăţi geometrice şi anume : *proprietăţi grafice*, legate de noţiunea de dreaptă, de plan, de concurenţa dreptelor etc. şi *proprietăţi metrice*, cînd apare noţiunea de distanţă sau de mărime a unghiurilor etc. Enriques presupune că aceste două categorii de proprietăţi

geometrice provin din două forme deosebite ale intuiției spațiale pe care omul le-a cîștigat în cursul experiențelor lui ancestrale, intuiția grafică fiind rezultatul senzațiilor vizuale, iar intuiția metrică, a senzațiilor tactile sau musculare. Tîrziu, spune el, aceste două forme distincte de intuiție geometrică s-au contopit în una singură, aceea de *intuiție spațială.*

— S-ar putea ca și *principiul necontradicției* să fi apărut tot pe atunci.

— E mai mult ca sigur că așa a fost ! Repetînd anumite acțiuni, omul a observat că ele aveau același rezultat și aceasta îi plăcea, îl mulțumea, creînd în el un anumit sentiment de siguranță față de acțiunile ce nu-i făceau vreun rău și nu se contraziceau între ele.

— După cîte văd ne apropiem de prima treaptă. Aștept să facem acest pas, spunîndu-mi cum a ajuns omul de la aceste acțiuni la noțiunile matematice de care s-a ajutat ca să-și rezolve, în mod practic, problemele ce-l preocupau : construirea locuințelor, măsurarea ogoarelor, cîntărirea ?

— Degeaba aștepți acest răspuns, căci nimeni nu-l mai poate da ! Din cele mai vechi scrieri care ne-au rămas, papirusurile egiptene și cărămizile babiloniene, se constată că omul *știa* să calculeze și arii, și volume, și de cîtă hrană ar avea nevoie o echipă de oameni plecată în armată sau ca să facă o anumită construcție, dar *în nici una dintre aceste scrieri* nu se amintește *cînd* și *cum* s a declanșat în mintea omului *noțiunea abstractă* de măsură, *de tangenta unui unghi* sau *pantă*, cum îi mai zicem azi, noțiune cu care egiptenii jonglau, fiindu-le necesară la tăierea pietrelor cu care au acoperit piramidele într-un chip așa de perfect, că totul apărea ca o uriașă față plană ! Sau, cum au ajuns babilonienii la concepția abstractă a calculului algebric ? Enigmele acestea rămîn enigme și te rog să nu-ți faci iluzia cu urcușul din preistorie se poate face pe trepte luminate cu neon ! Să fii bucuros dacă, din cînd în cînd, vom găsi și un opaiț care să ne împiedice să lunecăm de pe o treaptă abia săpată.

— Poate că aceste probleme ar fi putut fi descurcate dacă ele ar fi preocupat pe matematicienii din antichitate în aceeași măsură în care ne preocupă pe noi. Dar, era natural ca pe aceia să-i fi interesat, mai întîi, cum să găsească soluțiile problemelor ce le aveau înainte, nu să mediteze asupra genezei noțiunilor matematice ! Și totuși, mi se pare curios că grecii, care și-au arătat măiestria de povestitori în *Iliada* și *Odiseea,*

să nu fi fost tentați de istoria matematicilor, mai ales că această știință a fost creată, cinstită și chiar îndrăgită de ei!

— Pe greci nu-i putem învinui, căci ei au scris, numai că scrierile lor nu s-au păstrat decît în parte. De pildă, cele mai vechi informații se găsesc la Herodot, așadar din secolul al V-lea î.e.n. El arată că în Egipt, pe vremea faraonilor, pămîntul era împărțit în loturi pe care inundațiile le mai știrbeau. Apoi, în secolul al IV-lea î.e.n., Eudem din Rodos a scris o istorie a geometriei, dar și din ea nu s-au mai păstrat decît fragmente copiate de către comentatorii operelor lui Aristotel sau Euclid, ca de pildă Proclus, Heron din Alexandria, Nicomah ș.a. Dar ce puteau ști pe atunci grecii de cele ce se petrecuseră cu zeci de milenii înaintea lor, atunci cînd, deși alfabetul nu fusese inventat, multe adevăruri matematice fuseseră descoperite ? Mă întreb chiar, ce au putut ști grecii despre vremurile mai apropiate de ei, de pildă de școlile de scribi, ce funcționau cu cel puțin o mie sau două mii de ani înaintea lor, în Egipt, în cîmpia Mesopotamiei sau aiurea ?

— Poate că de aceea sînt mulți care încearcă să elimine aceste întrebări, afirmînd că omul a avut întotdeauna posibilități naturale de a cunoaște, bazate pe intuiție, pe experiență și pe deducție. Că prin aceste mijloace, proprii firii omenești, care au intervenit, fie pe rînd, fie simultan, omul a ajuns la procedeele de abstractizare și a învățat cum să se orienteze, cum să măsoare etc., așa numai din necesitate și fără nici o analiză prealabilă, exact după cum și azi omul normal mănîncă atunci cînd îi e foame, doarme cînd îi e somn etc., aceste acțiuni petrecîndu-se spontan.

— Cu alte cuvinte ne întoarcem la domnul Jourdain, care făcea proză fără ca să știe ? Oricum, atîta timp cît nu se poate dovedi, orice ipoteză poate fi plauzibilă. Problemele de istorie a matematicilor au devenit obiect de cercetare științifică abia de prin secolul al XVII-lea. În unul dintre cele două volume de *Istoria matematicilor*, scrisă de D. E. Smith, se amintește de o lucrare din secolul al XVI-lea a italianului Baldi, rămasă în manuscris și tipărită abia la începutul secolului al XVIII-lea sub titlul *Cronică a matematicilor* și apoi că, în a doua jumătate a secolului al XVII-lea, marele matematician englez John Wallis a scris și a încurajat cercetarea istoriei matematicii.

În Franța, astfel de cercetări au fost stimulate de enciclopediști. Mi-aduc aminte cu plăcere că am răsfoit, de multe ori, în Biblioteca de la Seminarul Matematic „Alexandru

Myller" din Iaşi, cele două volume de *Istorie a matematicilor*, publicate în 1808 de către Charles Bossut şi mai ales cele patru volume ale lui Jean Etienne Montucla, primul tipărit în anul al VII-lea după Revoluţie, iar ultimul în anul al X-lea, cînd, de data aceasta, în paranteză apare şi anul 1802 ! Desigur că în aceste volume nu trebuie să crezi că ar putea exista informaţii asupra epocii de început, în ele sînt mai puţine informaţii decît avem azi asupra matematicilor egiptene, babiloniene, chineze, hinduse, în schimb sînt multe şi preţioase relatări asupra matematicilor şi matematicienilor din epoca noastră. Dar, după, cîte văd, ne-am întins la taclale, uitînd că apucasem să urcăm o scărişoară ! Cred că ar fi vremea să te hotărăşti şi să-mi spui, încotro ai vrea să o luăm? Fiindcă, vezi, bădie, există două noţiuni fundamentale care, oricît ar părea de curios, deşi sînt strîns legate împreună, au rămas despărţite, aceea de *număr* şi aceea de *figură geometrică.*

Cercetările şi rezultatele stabilite în legătură cu relaţiile dintre numere au dus la crearea *Aritmeticii*, iar acelea asupra mărimii şi poziţiilor relative ale figurilor geometrice au format *Geometria. Aritmetica* şi *Geometria* sînt cele două izvoare principale, peste care dăm cri de cîte ori se caută începuturile matematicilor. Chiar dacă mai tîrziu apele lor s-au contopit, izvoarele şi-au păstrat limpezimea şi locurile neschimbate şi nu putem alerga de la unul la altul ca să urmărim cursul lor, în acelaşi timp.

— La grea încercare mă mai pui. Mi-ar place să te aud vorbindu-mi despre numere şi totodată rîvnesc la problema spaţiului. Te-am auzit vorbind odată cu nepotul meu, Nucu, despre *spaţiile abstracte.* Pe mine nici nu m-aţi luat în seamă, iar mie, ascultîndu-vă, mi-a venit să rîd şi să vă spun : „Măi, filozofilor, ce v-a apucat ? adică spaţiul însuşi nu-i o noţiune destul de abstractă ?" Dar vă vedeam aşa de serioşi. . . şi m-am sfiit să vă întrerup. Există în adevăr *spaţii abstracte* ? Uite, dacă vrei să ştii, problema aceasta a spaţiului nu i-a preocupat numai pe cei mai mari filozofi din lume, ci şi pe mine.

— Şi, în privinţa *spaţiului*, la ce concluzie ai ajuns ?

— Mai întîi şi întîi, că însăşi noţiunea asta de spaţiu e tare încurcată. Deşi e o noţiune abstractă, există un spaţiu real, concret, acela în care trăiesc eu şi despre care Immanuel Kant afirma că are proprietăţi apriorice, apoi există spaţiul cosmic, despre care teoria relativităţii are nu ştiu ce fel de

rezerve, pe urmă există spațiul geometric cu 1, 2, 3, și mai multe dimensiuni, ba, după cîte am auzit, există și spații abstracte — ce-or mai fi și acelea ? Iată cît de neclară mi-e noțiunea de spațiu.

— Bine, bădie mata tocmai să-mi vorbești așa? Oricine știe că un termen *abstract*, prin însuși conținutul lui, este confuz. Numai un cuvînt *concret* trezește în conștiința noastră obiectul de care este asociat numele lui. Cînd spun „Palatul Culturii din Iași", matale te și vezi, fără nici un efort, dinaintea statuii lui Ștefan cel Mare, alături de care te jucai adesea pe cînd erai copil și așa mai departe !

— Dacă-i vorba de exemple, cu *așa mai departe*, atunci de ce n-ai adus de la început vorba despre Seminarul Matematic ? Văd că au început să-ți sclipească ochii numai cît am deschis eu gura ! Te-ai și văzut acolo, așteptînd să ți se coboare din raft cartea ce ai dorit-o, chiar dacă se află pe o poliță de sus, lîngă tavan ! Ba, să ți se mai aducă și încă una, ca supliment !

— Să știi că mi-a făcut plăcere această evocare a Bibliotecii mele dragi, pe care cine știe dacă voi mai vizita-o. Am revăzut-o fără să fac nici un efort, ceea ce nu s-ar fi întîmplat



Universitatea din Iași. Biblioteca Seminarului Matematic

dacă ai fi pronunțat, de pildă, cuvîntul *sferă*. În acest caz, ar fi trebuit să mă gîndesc, la ce sferă te referi ?

— Îmi pare bine că de data asta te-am prins eu la strîmtoare! N-ai ales bine cuvîntul *sferă*, findcă el nu produce în mintea mea nici o încurcătură. O sferă, fiind locul punctelor egal depărtate de un punct fix, numit centru, îmi imaginez uşor, în orice punct din spaţiu, o sferă, aidoma unui balon de săpun, cu o rază oricît de mare sau oricît de mică, dacă vrei, chiar cu o rază zero, adică o sferă redusă la un punct !

— Înseamnă că m-ai obligat şi pe mine să mă gîndesc la sfera care-ţi convine ţie ! Eu însă îmi închipui o sferă cu raza egală cu 3 i !

— Asta nu se poate şi o spui numai aşa, ca să-mi faci mie în ciudă !

— De unde ai scos tu că *nu se poate* ?

— Fiindcă distanţa între centrul sferei şi un punct de pe ea trebuie să fie un număr real şi nu imaginar ! Ce înseamnă *distanţă imaginară* ?

— Vom vorbi noi şi despre asta, poate, mai tîrziu Acum, ca să te consolez, am să-ţi spun că de părerea ta erau toţi matematicienii pînă în secolul al XIX-lea, cînd au descoperit geometriile neeuclidiene După aceea, alături de sfera ta, cu rază reală, a mai apărut şi una cu rază imaginară, însă tot aşa de reală ca şi sfera care ţi-e în minte Numai că e oleacă altfel şi de aceea se numeşte *pseudosferă* !

— Aşadar nu-i sferă, deci, te-am prins !

— Nu, fiindcă pentru mine, dacă mă situez în spaţiul lui Bolyai-Lobacevski, ea este o sferă Dar pot să-ţi vorbesc şi de alte sfere, tot aşa de reale pentru mine : o sferă din spaţiul cu 4 dimensiuni, sau cu 5, 6, ..., *n* dimensiuni. Pe care trebuie să o aleg ? Continui să susţii că imaginea pe care mi-o evocă mie cuvîntul abstract *sferă*, e tot aşa de clară ca şi pentru tine

— Chiar dacă nu mai susţin aceasta, susţin că am alunecat de la drumul drept. Te rog să ne întoarcem şi să începi mata, frumuşel, cu geometria lui Euclid, aşa după cum ne-am înţeles !

— Nimic mai simplu, uite am să-ţi citesc ce-a scris Heron din Alexandria în legătură cu procesul de abstractizare în geometrie : „Geometria şi-a format obiectul prin abstracţie din cauză că dintre corpurile fizice care sînt tridimensionale şi au materie, geometria a separat materia din ele şi a creat

corpurile geometrice, adică volumul și prin abstracție a ajuns la punct Ei, acum îți place ?

— Deloc ! M-am așteptat să-mi spui ceva nou și cînd colo îmi prezinți o copie după Aristotel ! Dacă ai uitat, permite-mi să-ți amintesc, cu destulă exactitate, cuvintele lui : „Obiectele matematice sînt generate prin intermediul abstracției" sau „Ceea ce există în sine, într-o stare neseparată, este privit de matematician ca ceva separat" Ba mai mult, Aristotel a atras atenția asupra faptului că în noțiunea de abstracție există două semnificații deosebite, prima : *operația de lăsare la o parte* a unor însușiri ale obiectului considerat, a doua : prin abstracție se poate ajunge la *concepte mai generale*, la o idealizare a obiectelor, semnificație pe care, de altfel, o scosese în evidență, insistînd asupra ei, chiar Platon

— Nu zic ba, dar asta s-a petrecut cu vreo patru sute de ani înainte de Heron ! Era, cred, timpul ca acestea să fie amintite, fiindcă, din păcate, adevărurile geometrice stabilite de oameni nu se pot transmite prin ereditate ! Heron, care era inginer de meserie și nu filozof, s-a exprimat, cu vreo 18 secole înaintea noastră, cu rigurozitatea și precizia de acum, accentuînd, pe de o parte, procesul de abstractizare a materiei din care este compus corpul fizic, iar, pe de alta, pe acela de abstractizare a dimensiunilor

— Vrei să spui că el *subînțelegea* faptul că de la corpurile tridimensionale se ajunge prin abstractizare la cele bidimensionale și de la acestea la acelea cu o dimensiune sau fără nici o dimensiune cum este punctul ? Recunosc, totuși îmi permit din nou să temporez entuziasmul tău, revenind la original adică la Platon, unde expunerea e mai limpede. Pentru Platon, obiectele matematice erau situate undeva între *idei*, considerate de el drept modele perfecte ale obiectelor reale, și obiectele însăși. Această poziție intermediară arată că obiectele matematice erau privite drept niște *forme abstracte*, sustrase materiei și timpului ! De aceea, aceste obiecte geometrice se reprezentau prin figuri desenate cu rigla și compasul pe hîrtie, figuri prin care se defineau proprietățile lor caracteristice. Or, figura în sine fiind desenată pe hîrtie devenea prin ea însăși un model de abstractizare a spațiului cu trei dimensiuni !

— Stai, că aici nu-i chiar așa de simplu cum încerci să prezinți lucrurile ! Pentru Platon figura în sine era *o reprezentare concretă* a obiectului real și prin ea demonstrația logică devenea intuitivă. Rămîne însă adevărat că aceste

Tales

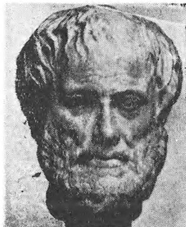


desene au contribuit îndeaproape la stabilirea modelelor abstracte ale corpurilor geometrice, forme în care se păstrează relațiile de ordonare și de dimensionare dintre corpul real și modelul său geometric.

— Iacă, și acum am să te întrerup ca să-ți amintesc de o altă observație a lui Platon pe care am găsit-o în *Republica* lui. El scria acolo că: „Geometrii folosesc figuri vizibile și judecă pe ele, dar ei nu se gîndesc la aceste figuri ci la altele cu care seamănă, dar care nu pot fi văzute decît în minte!"

— Mi-o amintesc însă mă întreb de ce te ții morțiș de Platon cînd nici lui Tales sau Pitagora nu le-a fost străin procesul de abstractizare? Ba sînt sigur că el a fost practicat și de matematicienii egipteni, sau babilonieni sau de alții cu mult înaintea lor, fiindcă altfel nu s-ar putea explica rezultatele, adică formulele de calcul din geometrie, care datează de nu se știe cîtă vreme! Cînd scribul egiptean socotea cît de mare era suprafața unui ogor, el nu se gîndea nici unde-i situat el nici ce calități avea pămîntul considerat nici al cui era, ci avea în vedere numai dimensiunile lui: lungimea și lățimea. De altfel, în papirusul Rhind găsești figuri geometrice desenate în mod stîngaci, desigur caracteristic unui elev, dar aidoma modelului fizic indicat de problemă. Acestor figuri nu li se aplică, oare, observația lui Platon?

— Nu aș putea jura! Acele desene s-ar putea interpreta și ca niște schițe topografice ale terenurilor respective nu


Aristotel

numaidecît ca modele ale unor figuri geometrice așa cum vor fi ele considerate de matematicienii greci.

— Incontestabil că poate exista această deosebire între cele două moduri de a desena o figură geometrică. Mai mult chiar, s-ar putea afirma că egiptenii și-au stabilit formulele altfel decît grecii, anume bazîndu-se pe un proces de inducție, adică în urma unui șir lung de încercări și reușite particulare. Meritul lui Tales, și al matematicienilor greci ce i-au urmat, constă și în aceea că ei au înțeles deosebirea dintre un adevăr stabilit pe cale inductivă și un altul dovedit prin raționament. În primul caz, adevărul se prezintă ca *probabil adevărat*, siguranța o are numai raționamentul logic care decurge din relațiile existente între diferitele părți ale unei figuri. Tales și elevii lui au formulat primele raționamente și prin el geometria a pășit pe o treaptă mai înaltă de abstractizare. Faptul s-a precizat în școala lui Pitagora, unde se insista asupra demonstrării teoremelor cît mai riguros posibil, ținîndu-se seama de definițiile noțiunilor abstracte, apoi a fost continuat și discutat în școala lui Platon care a deschis calea către logica lui Aristotel: „știință a ideii pure adică a ideii că elementul abstract al gîndirii este gîndire a gîndirii" cum va spune Hegel, peste vreo două mii de ani! Aristotel este acela care a contribuit, cel mai mult, la pregătirea terenului pe care se va dezvolta geometria lui Euclid!

— Mi-ai spus odată că au fost scrise geometrii și mai înainte de Euclid.

— Așa-i. Chiar în secolul al V-lea î.e.n. Hippocrate din Chios a scris o carte de geometrie pe care a intitulat-o, ca și Euclid, *Elemente*. Despre ea nu se cunoaște nimic în afară de titlu. Pe vreamea lui Platon s-au mai scris alte două geometrii, una de către Leon și alta de către Theodios. Aceste lucrări s-au pierdut și ele deși, după informațiile rămase, serveau drept manuale atît în Academia lui Platon, cît și în *Lyceum*-ul lui Aristotel.

— Nu-i de mirare, nu au putut ține piept colosului lui Euclid !

— Bine spus ! Servind de model, nu numai geometrilor din antichitate, ci și acelora de mai tîrziu și pînă în vremea noastră, *Elementele* lui Euclid, cu toate criticile ce i s-au adus, rămîne un colos ! La început, cred că s-au impus prin noutate ; dintr-o dată, *Geometria* se prezenta *altfel* decît ca o colecție de teoreme mai mult sau mai puțin disparate ! Ea apărea ca un *model* de știință abstractă, ca un *sistem unitar* de adevăruri ce decurg *în mod logic*, unele după altele, pe calea raționamentului deductiv, pornindu-se numai de la defiriții, postulate și axiome ! Știi, poate, care sînt cele șase principii logice, formulate de Aristotel, pe care Euclid le-a pus la baza *Elementelor* lui ?

— S-ar putea să nu le știu ? Îmi face plăcere să mi le repet, și de aceea nu le uit și nu alerg repede la caiet fac alții ! Iată-le :

(1) formularea generală a problemei sau teoremei ;

(2) desenarea figrilor corespunzătoare, așa cum apar din datele concrete ale problemei ;

(3) expunerea și analiza datelor ;

(4) construcții ajutătoare care pot conduce la rezolvarea problemei ;

(5) demonstrația propriu-zisă și

(6) concluzia, ce trebuia să apară, independentă de figurile folosite ! Ei, ce zici, bădie, credeai că mă ai în mînă și cînd colo, ți-am alunecat ca zvîrluga ! Așa că, e rîndul meu la întrebare ! De ce Euclid nu a dedus teoremele de geometrie pornind numai de la definiții, așa cum susținea Platon că este posibil și cum a procedat, de altfel, el însuși în cărțile VII, VIII și IX în care tratează aritmetica ? De ce a așezat la bazele geometriei postulatele și axiomele ?

— Prin această întrebare răscolești una dintre cele mai încurcate probleme cu care au avut să se chinuiască geometrii greci din antichitate. Problema are la origine modul în care

s-au reflectat în gîndirea matematică cele două laturi contradictorii ale materiei : *continuitatea* și *discontinuitatea*. Imaginile matematice abstracte ale acestor două contrarii sînt : *numărul întreg*, expresie a unei mulțimi discrete de obiecte *distincte și indivizibile* și *întinderea geometrică*, adică *linie, suprafață, volum*, imagine a continuului neîmpărțit în părți, dar avînd calitatea să *se poate divide la nesfîrșit*.

Odată precizate noțiunile de unitate și de număr (bineînțeles *număr întreg*, egal cu o mulțime compusă din unități, căci altfel de numere nu au fost concepute de greci) și după ce s-au stabilit relațiile cel mai simple dintre numere, Euclid a putut să dezvolte aritmetica în mod genetic, constructiv, adică construind teoremele din aproape în aproape, prin generalizări succesive ale relațiilor cele mai simple stabilite în prealabil, fără să întîmpine nici o dificultate. În geometrie însă, metoda aceasta *genetică* nu avea nici o șansă de reușită, pe de o parte fiindcă *punctul* era conceput ca un indivizibil, iar *dreapta, suprafața* sau *volumul* ca mărimi continue și divizibile la infinit, și pe de altă parte fiindcă măsurarea mărimilor geometrice, linii, suprafețe, volume puneau față în față aceste contrarii : *continuu* care trebuie măsurat cu unități *discontinue, discrete* ! Era natural ca în felul acesta să se nască paradoxul ! La întrebarea ce este linia, Aristotel susținea că linia este un continuu divizibil la infinit, pe cînd Democrit susținea că, deși are aspectul de continuu, linia este formată din atomi !

— Asta-i cam așa ! De îndată ce se punea problema evaluării unei mărimi continue, lucrurile trebuiau să se burzuluiască, fiindcă o mulțime discretă de obiecte o poți număra, dar cînd trebuie să măsori o lungime și îți alegi o unitate de măsură care nu se cuprinde de un număr exact de ori în lungimea de măsurat, atunci începe operația de reconsiderare a unității de măsură. Existau astfel două posibilități :

(1) una dintre noile unități de măsură să se cuprindă exact în lungimea dată și atunci *mărimea ei* se exprima prin raportul numerelor întregi respective, raport care azi se numește număr *fracționar sau rațional*, și

(2) să nu existe o unitate comună de măsură și, în acest caz, se ajunge la noțiunea de *mărime irațională*, cunoscută de însuși Pitagora și exprimată prin exemplul clasic legat de diagonala pătratului.

— Îmi place cît de pompos te exprimi : *exemplu clasic* !

— Atunci ce epitet ai să-i atribui lui Platon care spunea că „nu merită numele de om, acela care nu știe că diagonala pătratului este incomesurabilă cu latura sa“? Dar te iert de răspuns dacă-mi amintești frumoasa demonstrație a acestui adevăr! Am știut-o și poate că o mai știu, dar mi-ar face plăcere să o ascult din gura ta!

— Sînt sigur că o știi! Dacă desenăm pătratul și-i duce diagonala (fig. 1) notînd latura pătratului cu a și diagonala cu b, teorema lui Pitagora ne dă: $a^2+a^2=b^2$ sau $2a^2=b^2$. Dacă măsor diagonala cu latura înseamnă că trebuie să calculez raportul $\frac{b}{a}$. Din relația pe care am stabilit-o avem

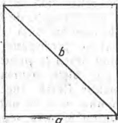


Fig. 1

$\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$. Or, în ipoteza că a și b sînt numere întregi, această relație este imposibilă. Într-adevăr, presupunînd contrariul, înseamnă că numerele a și b sînt numere prime între ele, căci dacă ele ar avea un divizor comun, atunci în raport el s-ar fi simplificat. Dar fiindcă $\frac{b^2}{a^2}=2$ rezultă că $b^2=2a^2$, adică b^2 este un număr par. De aici rezultă că el este de forma $b^2=(2b')^2$ și înlocuind avem $4b'^2=2a^2$ sau $2b'^2=a^2$, de unde rezultă că și a este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza că a și b sînt numere prime între ele. Rezultatul absurd la care am ajuns dovedește că a și b *nu sînt amîndouă numere întregi*, ci de altă natură, adică iraționale. Ei? Nu ai fi putut face singur demonstrația?

— Cred că nu. După ce aș fi scris teorema lui Pitagora, nu știam cum să pun problema măsurării, deși ar fi fost destul de simplu! Dar pentru mine semnul de întrebare a rămas încă, anume sub forma următoare: Dacă existența mărimilor

incomensurabile era admisă, despre ce paradox vorbeşti şi cum se ajungea la el ? Te referi la paradoxurile lui Zenon ?

— Şi la ele, dar nu voi insista asupra lor fiindcă le cunoşti. Mai exista unul ce punea în încurcătură atît pe susţinătorii ipotezei lui Aristotel, cît şi pe cei ce erau de partea lui Democrit. Iată-l : să considerăm un segment de dreaptă şi să-l împărţim, mai întîi în două părţi egale şi apoi pe rînd, fiecare jumătate în cîte două părţi egale şi aşa mai departe. Întrebarea este : ce se va întîmpla dacă se continuă împărţirea la nesfîrşit ? După ipoteza lui Aristotel, continuînd împărţirea se va ajunge la un segment de lungime nulă, fiindcă atîta vreme cît el nu se distruge complet, împărţirea poate continua. Procedînd acum la reconstituirea segmentului iniţial din părţile componente, constatăm că el a dispărut fiindcă o sumă, chiar infinită, de segmente de lungime nulă, reprezintă tot un segment de lungime nulă ! Dacă se admite însă ipoteza lui Democrit şi se presupune că prin împărţirea dreptei s-a ajuns la *atomi* adică la *puncte indivizibile*, aceste puncte sînt, la rîndul lor, nişte segmente extrem de mici, dar avînd totuşi o mărime finită. Încercînd reconstituirea segmentului iniţial, nu dăm nici de data aceasta peste el ; ci peste un altul, de lungime infinită, reprezentînd suma unui număr infinit de segmente de lungime finită !

— Da, acum am înţeles perfect ! Un segment de dreaptă nu se poate compune din puncte, în acelaşi mod cum se compune numărul 60 din 60 de unităţi ! Această ultimă părticică a dreptei era cu adevărat o *buturugă mică* în stare să răstoarne carul îndesat de teoreme al geometriei !

— Ca să ocolească această buturugă ce-i sta în cale, Euclid a apucat pe un alt drum, pe care el însuşi l-a deschis, spunîndu-şi că buturuga poate rămîne acolo să aştepte pînă s-ar găsi alţii, mai vrednici, să o cerceteze şi să o mute din loc.

— Nu se poate spune că n-a aşteptat destul !

— Cam vreo două mii de ani ! N-ar fi cazul oare ca şi taifasul nostru să mai aştepte ? Nu de alta, dar văd că ploaia a stat şi soarele îi cam aproape de amiază.

— Dacă spui mata, cine ar îndrăzni să te contrazică ? Numai că te rog să nu uiţi că după-amiază ai de parcurs vreo 2 200 de anişori ca să mă scoţi la lumină !

— Şi ai vrea să baţi recordul, străbătînd această distanţă astronomică numai în cîteva ceasuri ? Atunci, după mîncare e cazul să tragem şi un pui de somn !

* * *

— Prin cărţile de geometrie, cu care încep *Elementele*, şase la număr, mi-a spus Teodor Solonar cînd am reluat discuţia întreruptă la vremea prînzului, Euclid a stabilit o metodă nouă şi originală de a prezenta cunoştinţele matematice, numită mai tîrziu *metoda axiomatică*. El a aplicat-o la geometrie, dar în epoca noastră ea a fost generalizată (tot prin abstractizare), astfel ca să cuprindă şi alte sisteme matematice în afară de geometrie.

— Vrei să spui că, obligat să evite contradicţiile ce s-ar fi ivit dacă ar fi conceput linia, suprafaţa sau volumul compuse din puncte şi ar fi aplicat metoda constructivă, Euclid a considerat aceste elemente primordiale ca obiecte date, a stabilit relaţiile reciproce dintre ele prin postulate şi axiome, urmînd ca teoremele să fie deduse din aceste afirmaţii acceptate fără nici o justificare ? Trebuie să-i fi fost dragi caii...

— Ce au caii cu axiomatica, mă rog ?

— Iaca au ! Că de la ei trebuie să-i fi venit lui Euclid în minte să le pună ochelari geometrilor ca să nu vadă decît numai înaintea ochilor, adică ceea ce le cerea el prin axiome !

— S-ar putea, mi-a răspuns rîzînd prietenul meu. Dacă nişte bătăi în uşă l-au putut inspira pe Beethoven să scrie „Simfonia destinului", de ce n-ar fi posibil ca o pereche de ochelari de cai să fi declanşat în mintea lui Euclid ideea metodei axiomatice ? Euclid a realizat astfel un model perfect şi durabil de ştiinţă deductivă şi totodată un model abstract şi unic al spaţiului în care trăim.

— Mi se pare că, totuşi, au fost găsite pricini de critică a acestei opere unice şi perfecte ?

— Asta-i în firea lucrurilor, pete sînt şi în Soare, iar fără cusur rămîne o operă numai atîta vreme cît nu a fost înfăptuită ! Cel mai mult a fost atacat postulatul paralelelor, prin care se afirmă că dintr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce, într-un plan, decît o singură paralelă la acea dreaptă.

— Şi ce meteahnă i-au găsit acestui postulat ? Se îndoiau de el ?

— Nicidecum ! Erau ferm convinşi de adevărul pe care-l exprima însă nu şi de faptul că locul lui ar fi fost printre postulate. Părea mai puţin evident decît alte postulate şi se credea că ar putea fi stabilit printr-o demonstraţie, cu alte


Gheorghe Vrănceanu

cuvinte redus la o teoremă. De altfel, problema paralelelor preocupa pe geometrii greci încă mai înainte de a se fi scris *Elementele.* Este amintită și în lucrările lui Aristotel astfel: „unii matematicieni au încercat să demonstreze paralelismul a două drepte bazîndu-se pe egalitatea unghiurilor corespondente, fără să știe că ei se bazau tocmai pe ceea ce nu putea fi demonstrat dacă liniile nu ar fi fost paralele". De atunci și pînă azi, mulți matematicieni au fost de părere că însuși autorul *Elementelor* a avut îndoieli cu privire la natura — postulat sau teoremă — a adevărului asupra paralelelor. Iată de pildă cum se exprimă geometrul român, academician profesor Gheorghe Vrănceanu[1]: „este probabil că și Euclid să se fi gîndit la acest lucru, deoarece, cum am văzut, el utilizează axioma paralelelor după ce demonstrează o serie de teoreme care nu presupun această axiomă". Iar dacă vrei să o luăm de la început, am notat aici cele ce scria Proclus, comentatorul *Elementelor*, despre postulatul al *V-lea.* Cred că știi că i se mai spune și așa sau încă și *axioma a XI-a* ?

— Da, sînt numerele cu care apare această propoziție în diferite texte ale *Elementelor*. În unele copii, ea este trecută

[1] G. Vranceanu, C. Teleman: *Geometrie euclidiană. Geometrii neeuclidiene. Teoria relativității.* Editura tehnică, București, 1967, p. 92.

printre postulate şi *atunci* este al V-lea, iar în altele la axiome şi atunci e numerotată drept a XI-a.

— În comentariul său, Proclus arată mai întîi că Gemino (secolul I î.e.n.) a încercat să demonstreze postulatul al V-lea şi apoi continuă aşa : „această propoziţie trebuie eliminată complet din rîndul postulatelor, căci ea este o teoremă ce prezintă dificultăţi pe care Ptolemeu şi-a propus să le elimine". Aşadar, iată trei date importante : secolul I î.e.n. Gemino, secolul II e.n. Ptolemeu şi secolul V e.n. însuşi Proclus.

O dată cu traducerea *Elementelor* în limba arabă, s-a ivit şi problema postulatului paralelelor. Începînd din secolul al VIII-lea, timp de patru secole, au fost scrise numeroase lucrări în care sînt arătate metodele ingenioase prin care se căuta — fără nici un rezultat pozitiv—să se demonstreze postulatul paralelelor. Printre acestea am să-ţi aduc la cunoştinţă că se află şi o încercare a marelui poet Omar Khayyam, despre care ştii că a fost şi mare matematician. Apoi, această pasiune s-a trezit la matematicienii europeni din timpul Renaşterii şi a continuat pînă în secolul al XIX-lea cînd, ca orice pasiune, s-a stins !

— Era şi timpul, că de peste două mii de ani obseda lumea ! Şi, drept să-ţi spun, nu înţeleg cum de au putut să existe atîtea minţi luminate, atîţia oameni, buni cunoscători ai domeniului şi nu nişte diletanţi, atîţia oameni în toată firea, care au contribuit la progresul matematicilor, care să se lase seduşi de această idee fixă, că ar putea demonstra că printr-un punct exterior unei drepte, în planul format de punct şi dreaptă, se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă ?!...

— Şi eu aş vrea să-ţi spun drept că priveşti lucrurile cam superficial şi de aceea *nu-i de mirare că te miri* ! Fiindcă, pentru un matematician adevărat, avea mare importanţă dacă postulatele, considerate ca atare, sînt sau nu independente între ele, or asta nu se putea stabili decît arătînd că unul dintre ele ar putea apărea ca o consecinţă a celorlalte. Iar dacă nu ar fi independente, urmează că tot edificiul geometriei se sprijină pe mai puţine adevăruri evidente ! Dar tocmai aici apare iluzia. De pildă, un celebru matematician, cum era John Wallis, a fost tentat să creadă că a putut stabili postulatul paralelelor admiţînd existenţa figurilor asemenea, „ca o propoziţie auxiliară", spunea el ! De fapt, el a înlocuit postulatul paralelelor cu altul echivalent lui.

— Adică, şi-a furat singur căciula de pe cap!

— Cam aşa! Se cunosc peste 200 de încercări de această natură, dar trebuie să fi fost mult mai multe, căci nu toate au fost tipărite. Pe mine m-a amuzat să notez unele dintre ele, într-un caiet. Ai rîs de el azi dimineaţă, dar dacă ţi-ar veni vreodată gust să le cunoşti, caietul te aşteaptă! Pînă atunci, am să-l folosesc eu ca să-ţi prezint o atare încercare publicată pe la începutul veacului al XVIII-lea, de Girolamo Saccheri, sub titlul *Euclid curăţat de orice pată.*

— Preţios titlu!

— Mai degrabă naiv, fiindcă Saccheri a avut o idee cu totul originală, ce l-ar fi putut duce la dezlegarea definitivă a problemei, dar a trecut, ca un naiv, pe lîngă ea, fără să o vadă. Ideea originală a lui Saccheri a fost să demonstreze existenţa postulatului al V-lea prin reducere la absurd, adică să-l înlocuiască prin altul contrar lui şi să tragă concluzia din consecinţe. Aşadar, în loc să admită postulatul al V-lea, a presupus:

(1) că printr-un punct, la o dreaptă se pot duce mai multe paralele, sau:

(2) că printr-un punct, la o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă, bineînţeles, în ambele cazuri fiind vorba de planul figurii formată de dreaptă şi punct. Admiţînd toate celelalte postulate şi axiome stabilite de Euclid, Saccheri a dedus, în ambele cazuri, rînd pe rînd, toate teoremele corespunzătoare acelora din *Elemente*, aşa cum decurgeau ele în mod logic, ţinînd seama de una sau de cealaltă ipoteză asupra dreptelor paralele. Rezultatele au fost surprinzătoare, căci, în ambele cazuri, el a găsit cîte *o geometrie nouă, perfect riguroasă*, cu teoreme ce nu se contraziceau între ele deşi, comparate cu teoremele din *Elementele* lui Euclid, nu aveau nici un sens intuitiv. De pildă, reieşea, printr-o demonstraţie perfect logică, în primul caz că suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte, iar în cel de al doilea, că această sumă este mai mare decît două unghiuri drepte. „Sînt consecinţe *perfect logice* ale postulatelor impuse de mine", gîndea Saccheri, „dar aceste consecinţe sînt absurde şi prin aceasta se dovedeşte, fără drept de apel, că postulatul al V-lea este independent de celelalte, adică este postulat şi nu teoremă"! Dar cred că are să te distreze să-ţi citez chiar cuvintele lui: „pînă la sfîrşitul primei părţi din această carte mai rămîn încă 12 teoreme. Din cauză că enunţul fiecăreia în parte este prea complicat, nu le mai

arăt, ci spun că, în sfîrşit, acolo ipoteza recalcitrantă a unghiului ascuţit este demascată ca un neadevăr evident, căci ea ar trebui să admită două linii drepte care ar avea în acelaşi plan o perpendiculară comună, în acelaşi punct".

— Deşi vorbeşti pe înţeles, eu nu te pot pricepe. Despre ce unghi ascuţit este vorba ?

— Aici ai dreptate, nu ţi-am spus totul. Ca să introducă acele două postulate, opuse postulatului al V-lea, Saccheri construieşte un patrulater, ridicînd la extremităţile segmentului TT' două perpendiculare egale, TC şi $T'C'$ şi unind C cu C' (fig. 2). Acest patrulater este un dreptunghi numai în cazul postulatului al V-lea, căci atunci şi unghiurile C şi C' sînt unghiuri drepte. Dacă nu se admite postulatul paralelelor, atunci, din cauza simetriei, unghiurile C şi C' sînt

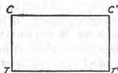


Fig. 2

numai egale şi pentru ipoteza (1) ele sînt ascuţite, iar în cazul ipotezei (2) ele sînt obtuze. Acest patrulater este cunoscut azi sub numele de patrulaterul lui Saccheri. Interesant că aceeaşi idee, a patrulaterului lui Saccheri, a avut-o, în orientul apropiat, atît Omar Khayyam, cît şi matematicianul iranian Nassireddin àl-Tusi din secolul al XIII-lea. Se pare că lucrarea lui Nassireddin a fost cunoscută de John Wallis şi de Saccheri, fiindcă ea a fost tipărită, în traducere latinească, la Roma, în secolul al XVII-lea.

— Foarte curioasă treabă ! Vezi, mă întreb adesea şi eu, cum de se împacă faptul că, deşi figurile geometrice sînt *forme pure, golite de materie*, nu mi le pot imagina altfel decît existînd şi umplînd spaţiul real în care trăiesc eu şi deşi eu ştiu azi mai multe decît putea şti Saccheri în secolul al XVIII-lea, totuşi nu pot accepta, exact ca şi el, ca patrulaterul lui să nu fie dreptunghi. Şi, îmi dau bine seama că la asta te-ai referit atunci cînd ai pomenit de naivitatea lui Saccheri, la acea *intuiţie spaţială* în care, fiindcă avea o încredere absolută, ea l-a făcut să-i scape cea mai formidabilă descoperire

matematică cu care s-ar fi putut lăuda secolul al XVIII-lea, aceea a geometriilor neeuclidiene !

— Da, Saccheri era așa de puternic influențat de intuiția spațiului fizic, încît considerînd absurde consecințele logice ale teoremelor demonstrate de el, a afirmat, sigur de sine și fericit că a reușit să-l curețe pe Euclid de orice pată, că acele *absurdități* dovedesc în mod cert *justețea* postulatului al V-lea! Și totuși, Saccheri avea în felul lui dreptate căci, ca tine și ca noi toți, el avea în minte forma abstractă a spațiului în care trăim și pe care azi îl numim *euclidian*, fiindcă numai în acest spațiu sînt valabile teoremele geometriei lui Euclid. Acest *spațiu geometric* este abstract, nu cuprinde în el nici flori, nici Soare, nici Lună, nici scaune, nici cărți, nici televizoare, nimic din ce ne-ar face să ne simțim în spațiul fizic real și totuși, acest spațiu abstract cuprinde *ceva nedefinit* care ne permite să stabilim *distanțele, ordinea* și *poziția* obiectelor geometrice, unele în raport cu altele. Prin acel ceva nedefinit se ajunge la concluzia că, deși el nu există în mod obiectiv și independent de corpurile ce le conține, are trei dimensiuni, se întinde la infinit și este omogen și izotrop, adică are aceleași proprietăți în toate punctele sale și este același în orice direcție a lui. Nemaiexistînd însă alte geometrii în afară de aceea a lui Euclid, nici lui Saccheri și nici nimănui înaintea lui, sau îndată după el, nu i-a trecut prin minte că ar mai putea exista și alte spații geometrice și deci să-l numească pe acesta *spațiu euclidian* ! Pînă în secolul al XIX-lea, spațiul a fost considerat, alături de timp, ca o categorie filozofică și nu preocupa decît pe filozofi sau pe geometrii dispuși să filozofeze. Așa cred că se explică de ce, aproape la 50 de ani după ce Saccheri a publicat lucrarea sa, Immanuel Kant în *Critica rațiunii pure* afirma că spațiul este o reprezentare *necesară, apriori*, care stă la baza tuturor intuițiilor și a tuturor fenomenelor exterioare și că „geometria este o știință care determină proprietățile spațiului, în mod sintetic și totuși *apriori*". Iată că nu numai Saccheri, dar și un filozof de talia lui Kant nu a putut trece dincolo de spațiul euclidian, nu și-a putut imagina posibilitatea altuia, deși, după cum ți-am spus, despre axioma paralelelor se scria, nu glumă ! Singurul care a înțeles cum stau lucrurile și prin urmare cît de complexă este problema spațiului geometric, a fost Carl Friedrich Gauss. El a fost acela care a afirmat, pentru prima oară, că postulatul paralelelor

Friedrich Wilhelm Bessel



nu poate fi demonstrat, că acesta este independent de toate celelalte axiome sau postulate ale geoemetriei lui Euclid și că de aici apare în mod firesc concluzia că pot exista și alte geometrii, bazate pe alte axiome decît acelea considerate de Euclid. Aceste păreri le-a comunicat, într-o scrisoare, în anul 1829 prietenului său, matematicianul F. Bessel, însă ca pe o taină pe care i-a cerut să nu o divulge, fiindcă se temea „de gălăgia boeţienilor".

— Boeţienilor, ai zis ? Dar acest termen îmi pare foarte de ocară căci geometria pe care a scris-o Boethius în secolul al VI-lea, pe cînd zăcea în închisoare, numai geometrie nu poate fi numită ! Se găsesc în ea cîteva cunoştinţe elementare scose din geometria lui Euclid, bune să amăgească ignoranţa caracteristică a matematicienilor din Evul Mediu. Aş trage de aici concluzia că marele Gauss îşi cam dispreţuia confraţii ! De altfel, să ştii că nu aştept să-mi răspunzi la aceste observaţii ale mele, fiindcă ai şi tu ciudă pe el că nu l-a încurajat pe János Bolyai şi îţi dau dreptate ! Dar cîţi ani avea Gauss cînd a scris acea scrisoare ?

— Să vedem ! Se născuse în anul 1777, aşadar, avea 52 de ani. Cu doi ani mai devreme publicase un studiu asupra suprafeţelor, studiu fundamental pentru dezvoltarea ulterioară a geometriei diferenţiale.

— Atunci, încă un semn de întrebare ! Era în plină maturitate şi glorie şi, cu toate acestea, primul din lume dintre matematicienii de atunci nu a îndrăznit să se atingă de falsul absolutism al geometriei euclidiene ! De ce? Din comoditate ?



János Bolyai



Nikolai Ivanovici Lobacevski

— Uite ce cred eu : dacă ne lăsăm antrenați de *enigma Gauss*, atunci adio spații neeuclidiene, adio spații abstracte !

— Ba nu ! adio Gauss și salve Bolyai, salve, Lobacevski !

— Și eu îi salut cu admirație pe acești doi tineri, necunoscuți pînă atunci în lumea matematicienilor, care au îndrăznit să afirme existența geometriilor neuclidiene, în ciuda neîncrederii și a batjocurii cu care a fost întîmpinată — *de boețieni* — minunata lor descoperire ! Mă închin acestor doi tineri, contemporani și înfrățiți în gîndire, care nu s-au cunoscut unul pe altul, deși au știut unul de altul : János Bolyai, născut la Cluj în 1802 și Nikolai Lobacevski născut la Nijni-Novgorod cu zece ani mai înainte. Afirmația entuziastă a lui János Bolyai din scrisoarea trimisă, în 1823, tatălui său : „am scos din neant un univers întreg", s-a dovedit a fi cu mult mai plină de înțeles decît o crezuse însuși Bolyai cînd a recunoscut că descoperise o comoară ascunsă de veacuri celorlalți matematicieni, comoara pe care Lobacevski avea să o numească încă și *Pangeometria*.

— În grecește *pan* înseamnă *tot* sau *pretutindeni*. Cum crezi că trebuie interpretat acest titlu ?

— Cred că Lobacevski a dat cuvîntului *pan* înțelesul de *universal* și deci geometria, pe care credea că a descoperit-o numai el, voia să se numească *geometrie universală*.

— Oare nu era exagerat ?

— Din contra, a fost spusă cu tîlc, fiindcă i-a dat această denumire abia în ultima sa lucrare, „apărută în 1855, pe care a dictat-o bătrîn și lipsit de vedere, însă păstrînd fermitatea spiritului și convingerea în dreptatea cauzei sale", cum scrie cunoscutul matematician sovietic A. D. Alexandrov[1]. Analizîndu-i opera, el arată că Lobacevski a susținut că geometria nu este *apriorică și independentă de experiențe*, așa cum presupunea Kant, cu cîteva decenii mai înainte, ci că noțiunile ei *fundamentale* au fost obținute prin simțuri, adică sînt expresia experiențelor ancestrale ale omului, iar aceasta impune ca relația dintre geometrie și realitate să fie precizată și prin experiențe. În acest sens, Lobacevski însuși a încercat anumite experiențe astronomice, fiindcă el era convins că, dacă pentru o porțiune limitată a spațiului real postulatul al V-lea era adevărat, el ar putea să nu mai fie adevărat dacă s-ar lărgi noțiunea de spațiu și s-ar considera o geometrie a spațiului cosmic. În acest caz, pangeometria ar putea fi mai potrivită ca să reflecte proprietățile acelui spațiu, geometria euclidiană devenind un caz particular al *pangeometriei*. De altfel, un veac mai tîrziu, prevederile lui Lobacevski au fost folosite de Einstein în *Teoria relativității !*

— Bine, dar în acest caz, Bolyai și Lobacevski au nimicit dintr-odată concepția pe care am moștenit-o de la greci despre geometrie ca deținătoarea adevărurilor absolute, deoarece ele exprimă rezultatele obținute prin abstractizare din experiențele asupra spațiului... Dacă se admite că, din punct de vedere logic, poate exista și o altă geometrie, atunci, tot în mod logic, poate exista încă una, adică un număr nelimitat de geometrii deosebite de ale lui Euclid, toate fiind științe abstracte, dezvoltate pe calea raționamentului din anumite ipoteze. Ce mai rămîne adevărat despre reprezentarea intuitivă a spațiului fizic, despre figurile geometrice, așa de precis conturate și chiar definitive ?

— Cam așa s-au întrebat și matematicienii din secolul al XIX-lea și primul răspuns la nedumeririle lor a fost dat de Bernhard Riemann, în 1854, într-o dizertație compusă la sugestia lui Gauss, avînd ca titlu : „Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei". Cînd a rostit-o, prelegerea nu

---

[1] *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, volumul III — Spații abstracte, Editura științifică, București, 1961, pagina 123 și cont.

a fost înțeleasă decît de Gauss și de vorbitor, dar, după moartea lui Riemann, memoriul publicat în 1866 a devenit celebru. În el se arată că noțiunea despre geometrie trebuie revăzută fiindcă geometria nu reprezintă adevărul rezultat din experiențele asupra spațiului fizic înconjurător, ci adevărurile logice asupra spațiilor ce rezultă ca posibile din axiomele-ipoteze puse la bază, iar aceste adevăruri nu au nici o legătură cu reprezentarea intuitivă a spațiului în care trăim. Ca dovadă, arată Riemann, însăși axioma că linia dreaptă este infinită nu este un rezultat al experienței noastre, experiența nu ne arată altceva decît că dacă urmărim o linie dreaptă, atîta cît omenește poate fi urmărită, nu i se dă de capăt. Ea ar putea fi finită și totuși nemărginită !

— Cum zici că ar putea fi ? Finită și totuși nemărginită ?

— Da, nemărginită, adică să nu-i dai de capete, dar totuși de mărime finită. Imaginează-ți Pămîntul, ca o sferă și că tu, în loc să stai acum de vorbă cu mine, ai fi pornit la o plimbare, dar nu pe Dea nici pe Runc, ci așa, înainte spre nord, de-a lungul meridianului ce trece prin Cîmpulung și că, fără că te abați de la el, te-ai duce și te-ai duce... ai ajunge la Polul Nord, apoi, după ce vei fi străbătut Alaska, Zambia, Marea Mediterană, Bulgaria ai fi ajuns din nou aici. Atunci te-ai uita încurcat la mine și eu aș izbucni în rîs, întrebîndu-te unde-s cele două capete opuse ale dreptei și cum de ne-am întîlnit dacă dreapta ta este infinită ?

— Ai dreptate, pe o sferă, cercurile mari, așa cum sînt Ecuatorul sau meridianele, joacă rolul liniei drepte din plan, au adică proprietatea de a fi drumul cel mai scurt dintre două puncte. Iar dacă se poate vorbi despre capetele *unui arc de cerc mare,* cercul întreg se închide, nu are capete și nici nu este infinit !

— Ei, acum fiindcă te-am convins, să ne întoarcem la Riemann. El a observat că, dacă ar fi să se facă geometria pe o sferă, atunci postulatul paralelelor nu ar avea sens, fiindcă toate cercurile mari de pe sferă, adică dreptele ei, se întîlnesc în două puncte, de pildă cei doi poli în cazul meridianelor. Pentru o geometrie pe sferă, în locul postulatului al V-lea, ar trebui pus postulatul : „Printr-un punct la o dreaptă (cerc mare) de pe sferă nu se poate duce nici o paralelă". Cu acest nou postulat și cu celelalte vechi, considerate de Euclid, Riemann a stabilit o nouă geometrie neeuclidiană, care se bucura pe atunci și de avantajul de a se baza pe un model geometric intuitiv, dovedindu-se astfel a fi geo-

metria plană pe care ar fi descoperit-o niște ființe inteligente bidimensionale, ce ar fi trăit pe acea sferă și nu ar fi avut posibilitatea să cunoască nimic dincolo de ea. Pentru ființele acelea, geometria stabilită de Riemann ar fi fost singura logică, absolută și intuitivă.

— Iată un fapt cu totul surprinzător care destramă dintr-odată un mit țesut pe îndelete de-a lungul a două milenii, afirmînd, în schimb, că axiomele geometriei euclidiene nu sînt adevăruri absolute ci relative, și că geometria euclidiană nu este unica ce poate fi creată. Realitatea geometriilor neeuclidiene, pe de o parte, dovedește că evidența intuitivă poate duce la concluzii false și, pe de altă parte, impune o cercetare mai profundă a axiomelor pe care se sprijină geometria euclidiană.

— Într-adevăr, așa este ! Geometria euclidiană este singura care are avantajul, prin ipotezele ce le-a formulat, de a fi modelul abstract al spațiului fizic din imediata noastră apropiere, ea singură are ca obiect relațiile spațiale ale corpurilor geometrice reale abstractizate. De aceea, demonstrațiile din această geometrie se bazează pe figurile vizibile și intuitive ce se pot desena pe o foaie de hîrtie, adică pe un plan, cu rigla și compasul. În celelalte cazuri, acelea ale geometriilor neeuclidiene, asemenea desene executate cu rigla și compasul pe o foaie de hîrtie sînt lipsite de sens, căci ele contrazic intuiția.

— Cred și eu ! Nu văd cum aș putea desena, așa ca să le văd, mai multe drepte paralele duse din același punct la o dreaptă și, de asemenea, nu-mi pot închipui că nu aș putea fi în stare să trag o paralelă la o dreaptă ! Aceste lucruri le pot admite ca adevărate numai fiindcă sînt posibilități logice impuse prin axiome, dar fără să încerc a le reprezenta pe o foaie de hîrtie întinsă !

— Ai spus bine : *foaia de hîrtie întinsă,* fiindcă lucrurile se schimbă de îndată ce se înlocuiește planul cu o suprafață sferică în cazul geometriei lui Riemann sau cu o suprafață pseudosferică în cazul geometriei lui Bolyai-Lobacevski.

— Prin această lucrare a sa, văd că Riemann a corectat și greșeala pe care o făcea Saccheri, anume, el a precizat faptul că, dacă teoremele unei geometrii sînt verificate de experiență, iar cele ale alteia par a contrazice bunul simț, din aceasta nu rezultă că primele teoreme sînt adevărate și că celelalte sînt false sau absurde. Geometriile neeuclidiene există deci

şi conduc la o nouă abstractizare, a *noţiunii abstracte de spaţiu geometric* !

— În lucrarea lui Riemann, noţiunea de spaţiu geometric a atins o treaptă de abstractizare cu mult mai înaltă decît aceea pe care o consideri matale, bădie, fiindcă el a mai introdus o nouă noţiune caracteristică unui spaţiu geometric, aceea de *curbură a spaţiului*. *Bazîndu-se pe ea, el arată că geometria euclidiană este geometria spaţiului de curbură nulă, geometriile neeuclidiene sînt geometrii ale spaţiului de curbură constantă*, şi, în fine, că există alte geometrii, numite mai tîrziu *riemanniene*, ale *spaţiilor curbe* ! Dar acestea ţi le-am spus aşa, numai fiindcă m-ai tras de limbă şi ca să accentuez faptul că abstractizarea introdusă prin *noţiunea de spaţiu curb* a însemnat o lovitură la fel de puternică dată intuiţiei spaţiale ca şi aceea pe care i-a aplicat-o Fermat şi Descartes, în secolul al XVIII-lea !

— De unde ai mai născocit şi trebuşoara asta ? Te gîndeşti probabil la crearea *geometriei analitice* dar, după modesta mea părere, geometria analitică e geometrie euclidiană în toată regula, fiindcă în ea nimeni nu s-a atins de nici o axiomă sau postulat al lui Euclid ! Fermat şi Descartes nu au făcut alta decît să introducă un sistem de referinţă pentru punctele din plan, adică un sistem de coordonate, iar mai tîrziu alţii au aplicat metoda şi pentru punctele din spaţiu, care însă a rămas euclidian !

— Da, cam aşa a şi fost judecată pe atunci geometria analitică, fiindcă nimeni nu ar fi fost în stare să tulbure noţiunea cristalină de spaţiu geometric corespunzător spaţiului fizic ! Numai că, prin introducerea unui sistem de coordonate, locul unui punct din plan sau din spaţiu îl deţinea o pereche sau un triplet de numere algebrice. Continuînd procedeul, în locul dreptei din plan se furişa o ecuaţie de gradul întîi între variabilele x şi y, considerate drept coordonatele unui punct variabil de pe acea dreaptă ; în locul unei curbe apărea o ecuaţie de forma $y = f(x)$, a unei suprafeţe, altă ecuaţie $z = f(x, y)$, toate *proprietăţile geometrice* ale acestor *figuri geometrice* fiind cuprinse în expresia analitică a formulelor respective. Alte formule algebrice corespundeau distanţei dintre două puncte, atît în plan cît şi în spaţiu, ariei unui triunghi, volumului unei piramide şi aşa mai departe.

— Stai că parcă acum a început să-mi fulgere ceva prin minte. Unde vrei să ajungi ? Vrei să spui că, în geometria analitică, toate *relaţiile geometrice* dintre *figurile geometrice*

ale *spațiului geometric*, s-au redus la calcule, la *relații algebrice* dintre numere algebrice, așadar, că spațiul geometric a fost topit în masa formulelor algebrice ? Dar bine, pînă acum eu am considerat asta ca o calitate și nu ca un defect ! Nu m-am gîndit că expresiile algebrice ar impieta intuiția spațială, ci că, din contra, algebra, s-a îmbogățit cu calități intuitive, împrumutate de geometria pe care a ajutat-o ! Nu se mai vorbește și nu se mai gîndește la soluția unui sistem de două ecuații de gradul întîi, cu două necunoscute, ci la intersecția a două drepte, punctul lor comun fiind soluția căutată.

— Este adevărat și ce spui tu. Aceasta este o față a medaliei, dar în același timp există și cealaltă față. Spațiul geometric intuitiv s-a transformat într-o noțiune cu mult mai abstractă, aceea de *spațiu aritmetic* sau *numeric*, adică într-o mulțime infinită de dublete sau triplete de numere algebrice. Numai în acest *spațiu aritmetic* a fost posibilă și extinderea numărului de dimensiuni ale spațiului geometric, considerîndu-se un spațiu, *euclidian deocamdată*, cu 4, 5, 6... sau chiar n dimensiuni, unde n poate fi și un număr nedefinit ! Ca să se ajungă aici a fost de ajuns să se mărească numărul coordonatelor unui punct și apoi să se generalizeze formulele stabilite în geometria analitică tridimensională, în același mod. De pildă, distanța dintre două puncte A (x, y, z, t) și $B\,(x_0, y_0, z_0, t_0)$ din spațiul euclidian cu 4 dimensiuni este $d_{AB}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2+(t-t_0)^2}$, adică, după cum poți observa, se exprima tot prin teorema lui Pitagora, generalizată la spațiul cu patru dimensiuni ! La fel se petrece și cu celelalte proprietăți geometrice ale figurilor dintr-un spațiu cu mai multe dimensiuni, căruia i-am zis euclidian, fiindcă, după cum ți-am spus, distanța dintre două puncte o socotesc, sau o definesc, prin teorema lui Pitagora generalizată, teoremă care nu-i valabilă decît numai în ipoteza postulatului paralelelor, pus de Euclid. Însă, dacă am ajuns la geometria analitică trebuie să o și depășim, deoarece nu orice proprietate geometrică se poate exprima prin mijloace algebrice. Lungimea unui arc de curbură, curbura în fiecare punct al ei, tangenta într-un punct la curbă, cu alte cuvinte orice proprietate a unei curbe sau a unei suprafețe din imediata vecinătate a unui punct, aria cuprinsă între două arce de curbă sau aria unei porțiuni de suprafață curbă etc., sînt elemente geometrice pentru stabilirea cărora este necesar să se folosească și elementele *Calculului diferențial și integral*, adică *Analiza infinitezimală*. Ramura din geome-



Bernhard Riemann

trie care folosește și acest instrument de calcul se numește *geometrie diferențială*. Așadar, geometria diferențială studiază figurile geometrice cu ajutorul geometriei analitice și a analizei infinitezimale, însă ea privește proprietățile lor din alt punct de vedere, în mod intrinsec.

— Cum adică intrinsec?

— Adică, cercetează acele proprietăți ale curbelor și ale suprafețelor care nu depind de poziția lor în spațiu, ci sînt legate intim de însăși curba sau suprafața respectivă. În acest sens, Riemann a considerat și spațiile curbe cu n dimensiuni, spații care se numesc azi *riemanniene*. O primă deosebire de spațiile euclidiene cu același număr de dimensiuni apare în expresia *distanței dintre două puncte oarecare* din acest spațiu, expresie care este diferită de aceea care s-a obținut prin generalizarea formulei lui Pitagora, formulă ce caracterizează numai spațiile de curbură nulă. Înseși punctele, a căror distanță trebuie măsurată, nu mai sînt, ca în cazul euclidian, la orice depărtare unul de altul, ci se consideră numai cazul a două puncte infinit apropiate. În această situație, notînd cu $T(x_1, x_2 \ldots x_n)$ coordonatele unui asemenea punct față de un sistem de coordonate, altfel decît cel cartezian și intim legat de spațiul riemannian respectiv, coordonatele punctului infinit vecin se vor scrie $T_0(x_1+dx_1, x_2+ +dx_2, \ldots, x_n+dx_n)$, distanța infinit mică TT_0 dintre aceste două puncte este dată de formula: $ds=\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dx_i\, dx_k}$, coefici-

enții g_{ik} fiind funcții de coordonatele punctului T. Suma se extinde la toate produsele de forma $(g_{11}dx_1^2+g_{12}dx_1dx_2+...)$ care se obțin cînd indicii i și k iau toate valorile de la $i, k=1$ la n.

Mi-ai mai vorbit de asemenea expresii și după cîte îmi amintesc, ele se numesc *forme pătratice pozitiv definite* în raport cu diferențialele dx_1, dx_2 ale coordonatelor punctului T, formă pătratică, fiind o expresie algebrică de forma unui polinom omogen și de gradul al doilea, iar pozitivă fiind, $ds^2>0$.

— De multe ori am constatat că știi lecția, acum la fel, bravo! Rămîne să-ți mai spun că stabilind o atare expresie, se cheamă că am fixat *metrica* spațiului riemannian și această metrică riemanniană se caracterizează prin faptul că există întotdeauna o transformare liniară de coordonate, astfel că dacă notăm cu $y_1, y_2, ..., y_n$ coordonatele punctului T față de sistemul, presupus de data aceasta a avea originea chiar în T, și facem schimbarea de coordonate, stabilită prin formulele:

$$x_1=a_{11}y_1+\dots+a_{1n}y_n$$
$$x_2=a_{21}y_1+\dots+a_{2n}y_n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n=a_{n1}y_1+\dots+a_{nn}y_n$$

atunci distanța infinitezimală TT_0 se exprimă prin formula:

$$ds=\sqrt{dy_1^2+dy_2^2+\dots+dy_n^2} \text{ sau } ds=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} dy_i^2}.$$

— Dar ai spus că această formulă caracterizează numai spațiul euclidian?

— Exact și o mențin. Concluzia? În regiuni infinit mici, spațiul riemannian se confundă cu cel euclidian.

— Dacă mă gîndesc la sferă, totul mi-e limpede. Geometria pe sferă este o geometrie riemanniană. Aici aleg ca sistem de coordonate cercul ecuatorului și un meridian. Față de acest sistem de coordonate, care nu mai este plan, nici coordonatele x_1, x_2 ale unui punct T nu mai sînt segmente de dreaptă, ci arce de cerc mare, distanța dintre T și vecinul său T_0 va fi dată de forma aceea pătratică $ds=\sqrt{\sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\, dx_{ik}}$, în acest caz, des-

tul de simplu scris şi dezvoltat $ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2}$. Acum, n-am decît să-mi închipui că duc planul tangent la sferă în punctul T şi consider un sistem de coordonate cartezian, cu originea în punctul de contact T. Coordonatele punctului T_0 sînt proiecţiile pe acest plan ale arcelor de cerc mare ce uneau pe sferă pe T cu T_0, aşadar le-am putea numi dy_1 şi dy_2. Restul e doar o jucărie, fiindcă distanţa TT_0 este, în acest caz $\sqrt{dy_1^2 + dy_2^2}$.

— Ai făcut o presupunere, în cazul sferei evidentă, dar în general nu, aceea că sfera, adică spaţiul riemannian este cufundat într-un spaţiu euclidian cu mai multe dimensiuni...

— Ai dreptate, sfera este un spaţiu riemannian cu două dimensiuni, iar acela în care am considerat planul tangent la ea este spaţiul nostru cu trei dimensiuni! Cred că aceasta este întotdeauna posibil, nu ?

— Pe credinţă nu se poate baza geometria, o ştii prea bine, dar te pot încredinţa că acest lucru a fost demonstrat şi anume că un spaţiu riemanian cu n dimensiuni se poate totdeauna — cel puţin parţial — cufunda într-un spaţiu euclidian cu $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensiuni; în cazul sferei vezi că-i tocmai pe tocmai. Dar mai este încă ceva, anume că un spaţiu riemannian cu n dimensiuni are această caracteristică specifică *de a coincide, într-o regiune infinit mică din jurul fiecărui punct al lui, cu un spaţiu euclidian cu acelaşi număr, n, de dimensiuni.* Acest fapt face posibilă trecerea de la forma riemanniană a distanţei la cea euclidiană.

— Înţeleg şi aceasta, gîndindu-mă la curbura sferei. Numai într-o porţiune infinitezimală, din jurul punctului de contact, planul tangent, aşadar spaţiul euclidian, poate coincide cu sfera, fiindcă apoi sfera se îndepărtează, din cauza curburii ei, de acest plan. Am impresia că geometria riemanniană cu n dimensiuni este o abstractizare a geometriei euclidiene cu n dimensiuni, aceasta cuprinzîndu-se ca un caz particular cînd, cum mi-ai spus, curbura spaţiului este nulă. Şi cu aceasta cred că procesul de abstractizare din domeniul geometriei a atins apogeul, căci s-a atins generalizarea maximă a noţiunilor geometrice. Nu mă duce mintea să întrezăresc mai departe ce şi cum ar mai fi de abstractizat, o dată ce punctul geometric a devenit sinonim cu o mulţime, chiar şi infinită, de numere algebrice.

— Îmi pare rău că te mulţumeşti cu atît de puţin. Riemann a ştiut cum se poate ajunge şi mai departe, ba încă, la ce

depărtare ! Tot în prelegerea despre care am vorbit că a ținut-o în 1854, el a enunțat următoarea părere : „Noțiunea generală de mărime cu mai multe dimensiuni, printre care se află și mărimile geometrice, a rămas complet neformulată. De aceea, eu mi-am propus să construiesc, în primul rînd, noțiunea de mărime cu mai multe dimensiuni cu ajutorul noțiunii generale de mărime".

— Ce vrea să spună cu asta ? Că prin coordonatele unui punct s-ar putea înțelege și *altfel de mărimi* decît numai numerele algebrice ?

— Desigur ! Riemann considera că orice *mulțime continuă de obiecte, de stări sau de fenomene de aceeași natură,* poate fi considerată ca formînd un anumit spațiu în care punctele lui sînt obiectele sau stările sau fenomenele respective, iar coordonatele acelor puncte sînt tocmai mărimile ce determină obiectul sau fenomenul corespunzător. Relațiile dintre aceste obiecte se consideră a fi analoage cu relațiile spațiale, făcîndu-se abstracție de toate celelalte particularități specifice ale mulțimii de obiecte sau de fenomene considerate. Iată-ne ajunși și la noțiunea de *spațiu abstract cu n dimensiuni* !

— Fantastic mai ești matale, măi bădiță Teodor. Am ajuns la ea cînd nici nu mă așteptam, exact așa cum făceai odinioară în plimbările noastre prin pădure, mă scoteai dintr-odată undeva unde nici nu visam ! Am înainte, așadar, alt gen de abstractizare, prin *generalizarea obiectului geometriei*. Cred că despre aceste lucruri am putea vorbi o săptămînă întreagă.

— Nu, n-am termina nici într-o lună, nici într-un an, numai că eu nu ți-aș putea ține tovărășie. Pe aceste probleme le privesc adesea ca pe-un stol de cocori, ce apucă „întinsele și necuprinsele drumuri de nori".

— Dar, dacă stau și mă gîndesc și eu oleacă mai bine, mi se pare că geometria matale se joacă cu abstracțiile ca pisica cu șoarecele. Întîi ajunge la noțiunea de spațiu abstract și după aceea se apropie, așa pe nesimțite, de fenomenele sau obiectele din spațiul real, considerîndu-le ca puncte ale sale. După aceea, tiptil-tiptil, înșfacă și înghite spațiul real, fiindcă relațiile și stările dintre fenomenele considerate există cu adevărat și se petrec cu adevărat în spațiul real ! Așadar, spune-mi, e vorba de un spațiu abstract sau de un spațiu real la care ajung prin aceste complicate procedee de abstractizare ?

— Nu ştiu să-ţi răspund la întrebare decît indirect, arătîndu-ţi că geometriile abstracte multidimensionale au o aplicaţie practică atît în matematici, cît şi în fizică, tehnică şi în alte ştiinţe, intervenind ca o metodă intuitivă pentru studiul mărimilor ce depind de 2, 3 sau *n* parametri.

— Bine, să te văd. Începe cu un exemplu din matematici. Nu vreau să rîd de tine, cerîndu-ţi să-mi dai un exemplu chiar din geometrie!

— Nu te-ngriji de asta! Ştii că eu am ce am cu proverbele şi este unul cu cine rîde la urmă! Drept care să ne oprim la geometrie şi din ea să alegem un elipsoid. Cunoşti acest corp. Acum să vedem de cîţi parametri depinde el. Mai întîi poziţia centrului său, aşadar cele trei coordonate spaţiale ale unui punct, apoi de mărimea semiaxelor lui, trei la număr, adică în total un elipsoid din spaţiul nostru cu 3 dimensiuni depinde de 6 parametri. Aceşti parametri pot varia, după cum îţi imaginezi uşor, în mod continuu şi deci ei pot constitui elementele din care să apară un spaţiu abstract cu 6 dimensiuni, în care se consideră elipsoizii ca puncte ale lui. Orice relaţie voi stabili între punctele acestui spaţiu, relaţii ce se scriu sub formă de ecuaţii, aceste ecuaţii reprezentînd curbe, suprafeţe, distanţe etc. vor demonstra o anumită proprietate a elipsoizilor, proprietate ce are prin însăşi expresia ei o anumită formă intuitivă. Aşa, la repezeală, ai putea, de exemplu, stabili că în spaţiul nostru există ∞^6 elipsoizi, deşi nu există mai mult de ∞^3 puncte.

Acum, alt exemplu din chimie. Să zicem că se studiază un amestec de 4 gaze. Starea acestui amestec depinde de concentrarea procentuală a fiecărui gaz, ceea ce înseamnă 3 parametri, apoi de temperatură şi de presiunea amestecului, aşadar, de 5 parametri, independenţi întrei ei şi care variază în mod continuu. Ei pot fi priviţi drept coordonatele unui punct din spaţiul cu 5 dimensiuni, spaţiu ce se va numi *spaţiul fazelor* sistemului gazos considerat. Procesele ce se petrec în sistemul considerat, atunci cînd unul sau mai mulţi dintre aceşti parametri variază în mod continuu, se vor reprezenta prin diverse curbe sau suprafeţe situate în acest spaţiu cu 5 dimensiuni şi studiul, din punct de vedere geometric al acestora, va traduce în limbajul chimic fenomenele de aşteptat să aibă loc. Dar, dacă vrei să mă întorc la matematici, află că una dintre cele mai moderne ramuri ale matematicilor este *Analiza funcţională* unde se studiază, printre multe altele şi mulţimile de funcţii de un anumit tip, drept puncte ale

unui *spațiu funcțional*. Într-un asemenea spațiu funcțional, proprietățile funcțiilor se definesc numai prin relațiile lor unele față de altele, de pildă prin *distanța* dintre ele. Dar, ca să nu bănuiești că am luat-o razna, uite că mă întorc spășit la geometria-mamă să caut în ea surse de abstractizare !

— După ce ai stors-o ca pe o lămîie, ce vrei să mai iei din ea ? Ori ai de gînd să-i tai și coaja-n bucăți ?

— Parcă am fi fost gînd în gînd, că de inimă-n inimă nu mă-ndoiesc ! Taman așa am să procedez. Am de gînd să-ți dau exemple de geometrii, de sine stătătoare, ce s-au format prin abstragerea unor anumite proprietăți studiate în geometria euclidiană și dezvoltîndu-le pe acelea, nici nu au mai pomenit de rest. De pildă, pornind de la proprietățile proiecțiilor.

— Știu că problema proiecțiilor și a perspectivelor a interesat mult pe pictorii și arhitecții din Renaștere. Am vorbit despre acestea și altădată, însă întotdeauna mi-am închipuit că proiecțiile sînt un capitol din geometria euclidiană.

— A fost, dar nu mai este ! În 1822 a apărut o carte, scrisă de matematicianul francez V. Poncelet, avînd ca titlu *Proprietățile proiective ale figurilor* și atunci matematicienii au constatat că proprietățile geometrice ce se păstrează prin proiecția centrală sînt atît de numeroase și de interesante, încît pot forma obiectul unui studiu independent de celelalte proprietăți geometrice ale figurilor. S-a creat astfel un domeniu nou numit *geometrie proiectivă*, în care se consideră că figurile geometrice nu au alte proprietăți decît cele proiective. Spațiul, abstract desigur, în care se află punctele, dreptele, planele sau hiperplanele, dacă numărul dimensiunilor este mai mare decît trei, se numește *spațiu proiectiv*. În mod analog, există un *spațiu afin* corespunzător *geometriei afine* care cercetează proprietățile figurilor geometrice ce se păstrează cînd coordonatele (x, y) ale punctelor lor se transformă liniar, adică după formulele :

$$x = ax_1 + by_1 + c$$

$$y = dx_1 + ey_1 + f$$

— Dar de ce se numește *geometrie afină* ? Știu că în latinește *affinis* înseamnă *înrudire*, aici despre ce înrudire poate fi vorba ?

— A figurilor ce suferă această transformare a punctelor lor. O transformare liniară schimbă o elipsă tot într-o elipsă,

o pereche de drepte paralele în altă pereche de drepte paralele și așa mai departe, adică le schimbă chiar în figuri înrudite cu acelea de la care s-a pornit.

— Și cum se explică aceasta?

— Prin aceea că o transformare a coordonatelor unui punct corespunde la o deplasare a punctului față de sistemul de axe respectiv, iar schimbarea liniară a coordonatelor punctelor unei figuri înseamnă întîi o deplasare a figurii, așa cum este ea, dintr-un loc în altul, în așa fel ca să rămînă simetrică față de un plan. Și apoi, o contractare sau o dilatare a ei într-un anumit raport și numai în direcția axelor de coordonate. Ți-am vorbit numai de două dintre geometriile abstrase din geometria euclidiană, mai sînt însă și altele ca: *geometria compasului, geometria riglată, geometria triunghiului...*

— Cînd am văzut în biblioteca ta cartea lui Traian Lalescu intitulată *Geometria triunghiului*, nu am crezut nici o clipă că titlul corespunde unei realități, mă gîndeam că a fost pus așa, mai mult simbolic.

— Să nu crezi că ai greșit. Pe la începutul secolului trecut toate aceste geometrii, și altele, încă duceau o existență clandestină. Actele lor de identitate au fost eliberate abia în 1872 de către matematicianul german Felix Klein ca urmare a *Programului de la Elrangen*.

— Cum adică *program* ? Ce fel de program ?

— Acesta a fost numele ce s-a dat prelegerii inaugurale pe care a ținut-o în acel an Felix Klein numit atunci, la vîrsta de numai 23 de ani, profesor la Universitatea din Erlangen. Subiectul prezentat a fost o surpriză în lumea matematicienilor, fiindcă el a tratat conținutul geometriilor din punctul de vedere al teoriei grupurilor, încercînd chiar o clasificare a lor, fapt ce poate fi privit ca un nou proces de abstractizare a noțiunii de geometrie.

— Știam că teoria grupurilor a fost introdusă de Evariste Galois, în prima jumătate a veacului al XIX-lea în legătură cu rezolvarea ecuațiilor algebrice și nu avea nimic comun cu geometria.

— Asta era pe vremea bunicii. Mai tîrziu, teoria grupurilor a depășit domeniul ecuațiilor algebrice, găsind aplicații și în alte domenii. Printre alții, matematicianul scandinav Sophus Lie a creat teoria grupurilor continue de transformări, grupuri ce au putut fi puse în legătură cu proprietățile figurilor geometrice. Felix Klein a introdus noțiunea de *grup de deplasări în spațiu* și a arătat că „proprietățile geometrice nu se mo-

Felix Klein



difică prin transformările grupului principal al deplasărilor din spaţiu. Reciproc, proprietăţile geometrice se caracterizează prin invarianţa lor faţă de transformările grupului principal".

— Ce se înţelege prin „transformările grupului principal al deplasărilor" ? Bănuiesc că trebuie să fie formulele de transformare a coordonatelor unui sistem în altul, dar nu sînt sigur că-i aşa.

— Da, formulele de transformare ale coordonatelor pot fi interpretate ca definind mişcări ale planului sau spaţiului întreg şi, întrucît relaţiile ce definesc aceste transformări biunivoce ale punctelor unele în altele sînt funcţii continue de coordonatele punctului, se dovedeşte că ele formează un grup continuu de transformări, lăsînd neschimbată figura asupra căreia a fost aplicată, deoarece acest grup păstrează distanţele dintre două puncte şi unghiul dintre două drepte. Un grup inclus în grupul principal este, de pildă, format din mişcările de rotaţie în jurul unui punct. Felix Klein a stabilit astfel că orice geometrie euclidiană sau neeuclidiană se poate caracteriza printr-un anumit grup de transformări biunivoce ale punctelor spaţiului geometriei respective. De pildă, grupul transformărilor punctuale biunivoce care păstrează distanţele şi unghiurile, adică lasă neschimbate simetriile figurilor în raport cu o dreaptă sau un plan, caracterizează *geometria euclidiană*. Dar mai sînt şi geometrii cărora le corespund transformări ce nu folosesc întreaga mulţime a punctelor din plan sau din spaţiul tridimensional. Aşa, de pildă, este

grupul transformărilor punctuale care lasă neschimbate *proprietățile proiective* ale figurilor, cu alte cuvinte, orice sistem de puncte situate pe o dreaptă ; acesta caracterizează *geometria proiectivă*

— Drept să-ți spun că pentru mine, oricît mi-ai spune tu că-i altfel, geometria proiectivă nu-i altceva decît un capitol mai dezvoltat al geometriei euclidiene și nu o geometrie *independentă* de ea !

— Treaba ta să crezi cum vrei. Am să-ți dau atunci un exemplu de o geometrie ce se caracterizează printr-un grup de transformări biunivoce astfel că, aplicate punctelor unei figuri, să nu se mai păstreze din figură altceva decît continuitatea ei și configurația punctelor.

— Cum adică? Un cerc să nu nu mai rămînă un cerc?

— Nu ! Un cerc poate să se schimbe într-o elipsă, într-un triunghi, în conturul unui elefant, adică a oricărei figuri care rămîne închisă, cu singura condiție că dacă trei puncte, *A*, *B*, *C* de pe conturul lui erau așa ca *B* să fie între *A* și *C*, această configurație să rămînă așa, sau dacă un punct *O* era în interiorul cercului, după transformare *O* să fie tot în interior. Asemenea transformare se numește *topologică*, iar geometria corespunzătoare *topologie*.

— Parcă mi-ai mai vorbit tu despre topologie! Nu-i oare geometria aceea de pe un plan de gumă, pe care-l pot întinde în lung și-n lat cu condiția să nu-l îndoi sau să nu-l tai?

— Da, în cazul topologiei plane. În cazul topologiei spațiale ar fi vorba de o figură în spațiu, avînd proprietăți elastice, pe care o poți deforma oricum fără să o rupi, să o tai și să o lipești din nou.

— În acest caz ai dreptate să afirmi că Felix Klein a trecut pe o treaptă mai înaltă de abstractizare a noțiunii de geometrie, căci el o reduce la studiul proprietăților ce rămîn invariante la anumite grupuri de transformări. Dar, rogu-te, prin aceasta nu se întoarce oare la Descartes?

— De întors nu se întoarce, ci întîlnindu-l, îl depășește. El trece mai departe, pe drumul deschis de Riemann, înspre o concepție mai largă a geometriei și a spațiului geometric.

— Mă mir însă că nu ai pomenit nimic despre grupul de transformări ce caracterizează o geometrie riemanniană?

— Nu ți-am vorbit despre ele fiindcă transformările, așa cum le-a conceput Felix Klein, nu există. Spațiile riemanniene se deosebesc esențial de acelea euclidiene sau neeuclidiene, prin *curbura* lor, ele nu au acea omogenitate a spațiilor despre

care ți-am vorbit, care să permită unui punct să se mişte liber dintr-un loc în altul. E ca şi cum acestei mişcări i s-ar opune nişte forţe şi punctul ar trebui să le înfrunte.

— Înţeleg asta destul de bine. De exemplu, noi ne putem plimba pe duşumeaua acestei odăi, pe care o consider ca o porţiune din suprafaţa Pămîntului, pe care iar îl consider ca un spaţiu riemannian cu două dimensiuni, fiindcă sîntem supuşi mereu forţei gravitaţionale. Dacă am fi însă într-un vehicul cosmic şi am ajunge în zona în care nu se mai exercită forţa gravitaţională, nu ne-am mai afla pe o suprafaţă riemaniannă şi n-am mai putea circula cu precizia de aici.

— Da, s-ar putea interpreta şi aşa. Oricum problema deplasărilor în spaţiile riemanniene nu o mai putem discuta noi doi. Însă, ca să nu rămîi decepţionat, am să-ţi spun că matematicienii nu au părăsit aşa, cu una cu două, frumoasa idee a lui Klein de a lega geometria de grupul ei de transformări. Problema pusă de el a fost generalizată şi astfel s-a ajuns la concepţia unor spaţii mai generale decît spaţiile lui Klein, numite *spaţii cu conexiune euclidiană.* Autorul lor a fost Elie Cartan şi azi se numesc *spaţii Cartan,* asta ca să se deosebească de alte spaţii, concepute de M. Frechét într-un mod şi mai abstract. Anume, un asemenea spaţiu abstract este definit printr-o mulţime de puncte legate printr-un număr nenegativ numit *funcţie de distanţă*, care satisface anumite relaţii. Ca un caz particular al acestor *spaţii Frechét*, apar *spaţiile euclidiene cu n dimensiuni*, dacă punctele sînt definite prin *n* coordonate şi distanţa prin formula lui Pitagora generalizată. Dacă în aceste spaţii nu se ţine seama de distanţă atunci avem de-a face cu *spaţiile topologice* şi care, la rîndul lor, nu-s decît un alt aspect al teoriei mulţimilor. Sînt şi spaţii cu o infinitate de dimensiuni, cea mai simplă clasă a lor fiind numite *spaţii Hilbert*, şi multe altele.

— Rău ne-am mai rătăcit, dragă bădie Teodor! Am pornit, ca oamenii, de la cele mai simple şi caracteristice elemente ale geometriei: punct, linie, suprafaţă şi cutreieram cuminţi plaiurile geometriei cînd, deodată, ne-am lăsat ademeniţi de năstruşnica ceea de abstracţie şi iată că ne-am trezit pe domeniile nesfîrşite ale teoriei mulţimilor! Cum să-i mai zici geometrie unui spaţiu cu un număr infinit de dimensiuni?

— De fapt nu i se zice *geometrie* decît în virtutea inerţiei şi fiindcă matematicienilor le place uneori să păstreze vechile numiri intuitive şi să gîndească în scheme geometrice. Acestea sînt spaţii funcţionale şi fac parte din *Analiza funcţională* sau din *Topologia abstractă.*

— S-a întîmplat cu geometria ce s-ar întîmpla cu picătura asta de cafea ce s-a prelins pe marginea farfurioarei. Dacă mi-o închipui împărțită, tot mai mult și mai mult, ajung la moleculă, apoi la atom, apoi la electroni care numai cafea nu mai este! Mă întreb la ce surprize ne-am putea aștepta dacă ne-am lăsa ademeniți de abstracție și în cazul cînd am porni de la numărul întreg pe care s-a clădit aritmetica? Punctul geometric s-a preschimbat într-o mulțime infinită de numere, ba și mai rău, dar numărul? Numărul, pe care-l cîntă și Eminescu, cu admirație? Ți-aduci aminte:

„Precum Atlas în vechime sprijinea cerul pe umăr
Așa el sprijină lumea și vecia într-un număr!"

— Bătrînul dascăl al lui Eminescu o putea face atunci, fiindcă el mai aparținea secolului al XIX-lea. Matematicianul de azi însă nu mai poate afirma aceasta, fiindcă el nu mai știe bine ce este un număr!

— Cum așa? Ce vrei să insinuezi?

— Nu insinuez nimic. Ai spus că vrei să urmărești calea ce ți-o indică abstracția și eu am anticipat. Uită însă ceea ce ți-am spus și hai să căutăm mai întîi noțiunea de număr întreg.

— Nu mă mai amăgi! Nimeni, niciodată nu va putea ști cum s-a ajuns la noțiunea de număr. De aceea, se admite că numărul întreg a fost conceput *pe două căi diferite*: ca simbol al unei mulțimi de obiecte distincte, adică *număr cardinal* și ca locul ocupat de un anumit obiect, dintr-un șir de obiecte puse într-o anumită ordine, adică *număr ordinal*.

— Perfect răspuns, dar abstracția îmi face semn că nu-i mulțumită! Și cred că are dreptate fiindcă, deși aceste două feluri de numere ar putea fi concrete: să spunem că ar fi vorba de *7 mere* sau al de *al șaptelea măr*, aceste două mărimi *concrete* presupun că au la activul lor un serios proces de abstractizare!

— Dacă mă gîndesc bine, văd că ai dreptate. Nu știu nici dacă cele 7 mere, sau cel de-al șaptelea măr, sînt mici sau mari, sînt coapte sau verzi, dulci sau îți fac gura pungă, bune sau putrede și o mulțime de alte calități de care s-a făcut abstracție, păstrîndu-se numai calitatea de măr. Dacă se face abstracție și de ea, atunci sîntem chiar în domeniul *numerelor abstracte*.

— Nu încă. Adevărata abstractizare a noțiunii de număr s-a petrecut abia atunci cînd omul a inventat cifrele, adică *a notat numerele cu cîte un semn*. Prin scris, numărul a fost despuiat de orice calitate fizică și a devenit o *idee abstractă*, reprezentată printr-un *simbol*. Acest simbol — cifra — e

singurul mijloc prin care un număr se deosebește de altul și care, totodată, îi stabilește locul în ordinea naturală a numerelor ; cifra e singura lui identitate. Căci dacă numărul 3 sau 5 mai păstrează o semnificație concretă, numărul 54 387 nu mai are nici una. Și mai este ceva; în domeniul gîndirii abstracte se ivesc mereu noi posibilități de construire, prin legătura ce se poate stabili între diferite noțiuni abstracte. Oamenii nu numai au numărat, dar au și măsurat. De la noțiunea abstractă de număr întreg s-a ajuns astfel la altă noțiune abstractă, aceea de *număr fracționar* ca raport dintre două numere întregi, și apoi la noțiunea de *număr irațional*. Meritul cel mare al egiptenilor sau al babilonienilor este că au generalizat noțiunea de număr, adăugînd la mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor fracționare sau aceea a numerelor iraționale, pe care le deosebeau de numerele întregi prin faptul că erau însemnate prin cifre speciale. Din acest punct de vedere ei i-au întrecut pe greci fiindcă au intuit *în mod naiv*, cum spune N. Bourbaki, noțiunea de *număr real*, pe cînd grecii au rămas numai la concepția de *număr întreg*, privind numerele fracționale și cele iraționale ca *mărimi* geometrice sau fizice, dar nu ca numere. Egiptenii au folosit un sistem de numerație zecimal și aveau semne speciale pentru fiecare dintre unitățile de diferite ordine, de la 1 la 10^7. Babilonienii, pe lîngă sistemul *zecimal*, au mai avut un altul, *sexagesimal*.

— Da, știu. Mai mult chiar, dacă pentru a scrie un număr în sistemul zecimal alăturau, ca și egiptenii, semnele pentru unități, zeci etc., în cazul sistemului sexagesimal a fost stabilită o notație care se aseamănă cu a sistemului nostru pozițional, adică un același semn putea reprezenta unități de diferite ordine, valoarea lui depinzînd de poziția semnului în număr. Dar mi se pare că nu-l aveau pe zero?

— Nu, invenția lui zero, și deci a adevăratului sistem pozițional, rămîne titlul de glorie al matematicienilor hinduși, chiar dacă sugestia lui le-a venit din cîmpia Mesopotamiei. Ei au introdus pe zero nu numai ca simbol al nimicului, ci și ca număr.

— Atunci au mai urcat o treaptă înspre abstractizarea noțiunii de număr!

— Desigur. Însă, dacă babilonienii au ajuns pînă la noțiunea lui zero, au sărit, în schimb, nu se știe cum și cînd, peste o adevărată prăpastie, adică au trecut din domeniul aritmeticii în acela al algebrei. Din lipsă de texte nu se poate ști cît de

departe au pătruns egiptenii în acest domeniu, dar babilonienii gîndeau pînă și problemele de geometrie sub forma abstractă a algebrei, înainte de a stabili rezultatul cerut de ele. Ei știau să rezolve ecuațiile de gradul I, II și chiar unele ecuații de gradul III sau transcendente, deși nu au inventat nici un simbol pentru notarea necunoscutei. Scriau cuvîntul ce reprezenta necunoscuta, dar îi dădeau o semnificare simbolică, adică abstractă. În Europa se va ajunge la această treaptă de abstractizare abia peste vreo 30 de veacuri, cu alte cuvinte pe la începutul secolului al XVI-lea.

— Mi se pare că în veacul al XVI-lea numerele negative abia apăreau!

— Da, dar nu au fost recunoscute de către toți matematicienii, nici chiar de către Viète, care a introdus literele în locul numerelor și a pus astfel bazele algebrei moderne.

— Însă Cardan arată că o ecuație poate avea rădăcini negative. Mi se pare că el le numea rădăcini cu *minus pur* ca să le deosebească de rădăcinile complexe conjugate, pe care le numea cu *minus sofisticat*, nu-i așa?

— Da, totuși, pentru Viète numerele erau *numai pozitive*, el nu a putut să conceapă această generalizare a noțiunii de număr deși a putut ajunge la noțiunea unui *calcul generalizat*, cu *litere ținînd locul numerelor*. De-abia în secolul următor, René Descartes, care a perfecționat opera lui Viète, a stabilit noțiunea de număr algebric, adică de număr însoțit de semnul + sau —, noțiunea care a impus și introducerea unei alte noțiuni, aceea de *valoare absolută* și *relativă* a unui număr. El a arătat cum se poate stabili, fără a rezolva o ecuație, care este numărul rădăcinilor ei pozitive, a celor negative și a recunoscut că există *rădăcini* de forma $a+bi$, a și b fiind numere reale iar $i=\sqrt{-1}$. Pe acestea le-a numit *imaginare* din cauză că asemenea numere nu se puteau reprezenta în mod grafic în planul sistemului de coordonate, dacă a și b ar fi fost presupuse a fi abcisa și respectiv, ordonata unui punct.

— Ai spus că Descartes considera că expresiile de forma $a+bi$ pot fi rădăcini ale ecuațiilor, aceasta nu-i tot una cu a le admite existența ca *numere complexe*?

— Desigur că nu! Mai întîi fiindcă însuși noțiunea de număr nu era clarificată. Cei mai mulți priveau numărul ca un *raport* și nu ca o mulțime de unități. Această concepție a fost pusă la punct mai întîi de Descartes și apoi de Newton. Și numerele negative erau privite cu neîncredere, fiindcă nu puteau explica regula înmulțirii lor. Dar Descartes le-a acceptat,

adică a folosit numerele complexe, ca pe un rău necesar! Chiar şi mai tîrziu, ele au fost acceptate de Leibniz, de Moivre care a stabilit o formulă celebră ce-i poartă numele, formulă ce stabileşte în mod intuitiv mecanismul ridicării la putere şi deci şi al extragerii de rădăcini de orice ordin, dintr-un număr complex. Euler introduce notaţia $\sqrt{-1}=i$, Wessel stabileşte reprezentarea lor geometrică pe care o redă şi Argand în primii ani din secolul al XIX-lea dar, *cu toate acestea*, numerele complexe trec numai drept un mijloc interesant şi comod de calcul! Abia Gauss, şi apoi Cauchy au avut cuvîntul hotărîtor şi de atunci ele *sînt considerate* ca numere. Gauss a arătat mai întîi că aceste numere complexe sînt o extensiune a numerelor reale cum au fost şi acelea care au condus de la numerele întregi la fracţionare şi de la numerele pozitive la negative.

— A mai rămas încă o problemă de dezlegat! Rezolvarea ecuaţiilor algebrice dădea pe atunci multă bătaie de cap matematicienilor fiindcă nu se puteau găsi formule cu radicali, prin care să se rezolve ecuaţiile algebrice de grad mai mare decît patru, aşa cum existau pentru cele de gradele II, III şi IV!

— Ai dreptate. Abia în 1824 Niels Abel a demonstrat că *este imposibil să se rezolve prin radicali* ecuaţiile algebrice generale de gradul 5 sau mai mare. Aceasta înseamnă că rădăcinile lor nu se mai puteau exprima printr-un *număr finit* de operaţii aritmetice şi de extrageri de rădăcini, efectuate cu coeficienţii acestor ecuaţii.

— Cu alte cuvinte, i-a făcut să vadă că habar n-aveau despre natura numerelor iraţionale, închipuindu-şi despre ele că se pot exprima numai prin radicali, sau printr-o combinaţie, în număr finit, de operaţii de acest fel.

— Ţi-am mai spus şi altădată, şi de aceea nu insist, că, pornind de la teoria grupurilor, indrodusă de Evariste Galois, studiul ecuaţiilor algebrice a luat o altă direcţie. S-au descoperit astfel întregii algebrici de ordinul *n*, numerele algebrice de ordinul *n* şi numerele transcendente care nu mai satisfac nici o ecuaţie algebrică. Acestea sînt numai unele înfăţişări ale numărului, stabilite de matematicienii din secolul al XIX-lea prin cercetarea ecuaţiilor algebrice şi nealgebrice. Dar alte probleme din matematici, matematici aplicate sau fizică au condus şi la descoperirea unor noţiuni mai generalizate despre numere, ca, de pildă, quaternionii, numerele transfinite, matricele şi altele despre care, drept să-ţi spun nu am


Niels Henrik Abel

un chef să-ţi vorbesc acum. Ţi le-am enumerat numai ca să-ţi faci o idee de aspectul complex al noţiunii de număr, aşa cum se prezenta el matematicienilor de la începutul veacului nostru, ca să-ţi dai seama de ceea ce-i aştepta pe matematicienii ce-şi propuneau să răspundă la întrebarea „ce este numărul?" Acesta este numai un aspect, dar mai este şi altul. Imposibilitatea rezolvării ecuaţiei de gradul V prin radicali, nu a dus numai la lărgirea şi precizarea noţiunii de număr iraţional, ci şi la crearea unui nou domeniu de cercetare, anume *Algebra abstractă*.

— Nu ţi se pare un pleonasm? *Algebra* nu-i oare prin definiţie cea mai abstractă ramură a matematicilor?

— Este, dar asta nu a împiedicat-o să urce înspre alte culmi ale abstractizării. Mai întîi, prin introducerea notaţiilor literale, algebra a depăşit nivelul iniţial la care îşi propusese să rezolve doar ecuaţiile de gradul I şi II sau eventual unele ecuaţii mai complicate, în numere absolute. Ea a devenit astfel o *teorie a calculelor literale* şi după aceea, cînd s-a aflat o metodă generală de rezolvare a ecuaţiilor de gradul III şi IV, algebra şi-a schimbat din nou profilul, ocupîndu-se de metode de rezolvare ale ecuaţiilor algebrice. Apoi din nou, noţiunea de *grup* a condus la abstractizarea noţiunii de *operaţie algebrică*. În grup, operaţia prin care se ajunge de la două elemente ale lui la un al treilea nu mai este *specificată*, nu-i nici adunare, nici înmulţire ci *altceva*, este pur şi simplu o *compunere*, o *operaţie* şi atît, o operaţie care depinde de *struc-*

tura grupului. Noțiunea de *structură* apare astfel ca un nou instrument al gîndirii, care abstractizează însăşi legea de compunere algebrică, aplicîndu-se la elemente care nu au decît vagi analogii cu numerele. Însă, cred că am vorbit destul, să mai facem și o pauză!

— Fie. Cele ce mi-ai spus mă fac să-i dau dreptate, mai mai mult ca oricînd lui Platon. Spunea el odată că „adevărul matematic există într-o lume independentă de om și mintea recunoaște aceste adevăruri prin contemplare.“ Ce crezi, a nimerit-o?

PROBLEMA INFINITULUI ÎN MATEMATICĂ

Am hotărît să-mi petrec cele patru zile de vacanţă din jurul Armindenului, la Cîmpulung, unde mă chemase prietenul meu Teodor Solonar, curios fiind să afle cît mai repede impresiile cu care m-am întors din Marea Britanie. Ca bucuria să-i fie mai mare, i-am scris că nu pot veni, şi, cînd nu mă mai aştepta, s-a pomenit cu mine. Am deşertat sacul cu noutăţi şi chiar a doua zi am pornit-o, prin Valea Seacă, înspre Rarăul după care tînjeam. În drum am salutat pădurile, pîraiele şi izvoarele şi, după ce ne-am închinat Pietrelor Doamnei, am poposit la cabană, hotărîţi să ne culcăm devreme ca să prindem răsăritul soarelui. Cînd să aţipesc aud glasul prietenului meu :

— De ce mi-ai scris că nu poţi veni ? Ce piedică ai avut ?

— Nici una, i-am răspuns amuzat la gîndul că amînase atîta vreme explicaţia. Te-am minţit !

— Ai minţit ? a îngînat el, ca dus de gînduri.

Credeam că îi era somn şi am tăcut, dar ele a scăpărat un chibrit şi după ce şi-a aprins ţigara şi a tras cîteva fumuri, a adăugat :

— Drept să-ţi spun, nu pot şti dacă-i adevărat sau mă amăgeşti !

Nu mi-a plăcut răspunsul şi ridicîndu-mă în capul oaselor i-am replicat :

— Adică te îndoieşti de adevărul vorbelor mele ? Dacă-i aşa, să ştii că mîine plec la Iaşi !

— Mîine te poţi duce şi la Londra, că şi aşa văd că te-au înstrăinat străinătăţile, de nu-i chip să te ating nici cu o floare...

— Flori am zărit eu prin pădure. Mata ai atins cu parul !

— Ba nu ! Şi dacă nu ţi-e somn, mă prind să ţi-o dovedesc.

— Parcă de răul matale mai poate avea omul somn, am bombănit eu, bucuros de întorsătură.

— Atunci, a continuat el, hai să zicem că te cred. Spunînd adevărat că ai mințit, înseamnă că m-ai amăgit. Și dacă ai spus o minciună...

— Rezultă că am spus un adevăr, fiind adevărat că am spus o minciună ! i-am luat eu vorba din gură. Va să zică mi-l maimuțărești pe Epimenide, în miez de noapte ?

— Va să zică a fost par sau floare ?

— Cu o floare ca asta nu se face primăvară, dar mă tem că se va face ziuă !

— Nu te teme ! Hai, noapte bună !

— După ce m-ai stîrnit, nu te mai preface ! Parcă nu știu că marfa ta așteaptă cam nultișoi mușteriul ?

— E adevărat, numai că alta-i marfa care stă gata pregătită. Asta a căzut chilipir, cînd ai rostit forma schematică, echivalentă cu paradoxul lui Epimenide. Atunci mi-am zis : dacă nu bagă de seamă, îl trag pe sfoară !

— Ia stai ! Nu-s beat de somn și cred că am înțeles bine ! Cum ? Voi matematicienii n-ați mai avut alta de schematizat decît exuberanta expresie a poetului cretan, pe care noi, cei îndrăgostiți de ea, am păstrat-o cu grijă, timp de peste 26 de veacuri ? Ați îndrăznit să aruncați la gunoi această bijuterie unică : „Toți cretanii sînt mincinoși", înlocuind-o cu o formulă grosolană că „eu mint" sau „am mințit" ? Și tu te-ai făcut părtaș acestei monstruozități, fără să tremuri de indignare ? Unde găsești echivalență între : „Toți cretanii sînt mincinoși", care-i tip de judecată antinomică[1], și „eu mint", care nici măcar nu-i judecată ? Cum de ai acceptat uscăciunea acestei propoziții în locul luxuriantei atmosfere pe care o evocă declarația poetului cretan ? Nu ți-a sunat oare și ție în urechi, ascultînd-o, vuietul mării ? Nu ai simțit gustul sărat al aerului și n-ai zărit cretanii nedumeriți, adunați în piața publică, întrebîndu-se unul pe altul : „Ce i-a venit poetului nostru, să spună așa ceva ? Dacă toți cretanii sînt mincinoși, atunci el trebuie să fi spus o minciună, căci și el e cretan ! — Dar dacă a spus o minciună, minciuna lui e un adevăr ! Așa-i ! Parmenide a spus un adevăr ! Dar dacă a zis un adevăr, acesta e și mai dihai minciună, fiindcă și el este cretan" !

[1] *anti* : contra, *nomos* : lege. Se pun în contradicție două legi, astfel ca adevărul propoziției enunțate să atragă după sine falsitatea ei. Tot așa, paradox : *para* : contra și *doxa* : părere, înseamnă „părere absurdă', contrară unui adevăr acceptat

— Vai ! Vai ! Nici așa nu-i bine ! Hai să o luăm de la început !... Să aflăm odată ce-a spus poetul nostru : Adevăr ? Minciună ?

— Nu te-au copleșit, prin insistența lor, aceste întrebări, aidoma valurilor ce se izbesc de țărm ? Și nici nu le-ai urmărit, răspîndindu-se, de la ureche la ureche, în toate centrele de gîndire elenă ? Le-au oploșit cei din Eleea, unde în mintea lui Zenon au rodit alte paradoxuri, încă și mai tulburătoare ! Apoi, toate împreună s-au îndreptat înspre Atena, dînd tîrcoale pe la școala lui Platon și furișîndu-se în grădina peripateticienilor. Cît trebuie să-l fi chinuit pe mîndrul Aristotel aceste ispitiri pînă să le fi venit de hac! Cîtă încurcătură, nu au provocat paradoxurile, 5 la număr după cîte știu eu nu numai în antichitate, dar și în Evul Mediu, în Renaștere și chiar mai tîrziu.

— Nu greșești de loc dacă adaugi și timpurile moderne. Faimosul matematician și filozof al vremurilor noastre, Bertrand Russell, a arătat că structura logică a paradoxurilor matematice stabilite de el are aceeași factură cu aceea a paradoxului lui Parmenide. De altfel, tocmai interesul față de ele a condus la schematizarea care te-a înfuriat, alungîndu-ți somnul. Și dacă n-am de gînd să-ți contrazic observațiile — în unele privințe ai dreptate — recunoaște și tu că propoziția aceasta, așa seacă cum este, te-a tras pe sfoară ! Ba, dacă nu o țineam eu bine, te rostogoleai de pe vîrful Rarăului pînă-n tîrgul Iașului și aveam ce alerga după tine ca să te prind ! Așa că acum, hai să tragem un pui de somn și mîine dimineață vom vedea noi cum s-or drege lucrurile !

În zori am înotat prin ceață, așteptînd Soarele, iar după ce am privit înmărmuriți munții și albastrul cerului, cercînd să străbatem depărtările, ne-am întors la cabană să ne încălzim. Acolo am găsit răgaz să pun întrebările care mă frămîntau :

— Mă gîndesc la paradoxurile lui Zenon, pe care nu te-ai învrednicit să le bagi în seamă, cînd le-am pomenit astă noapte și mă întreb : Oare ce șurubel n-a fost destul de bine strîns, în gingașul mecanism al gîndirii eleatului, de i-au ieșit, așa, unul după altul, toate patru deodată ?

— Cine știe ? Sigur nu-i nimic, dar foarte probabil că nu era ceva în regulă la șurubul infinitului !

— Șurubul infinitului ! Da ! Acela și acum e greu de mînuit cum trebuie. Oare noi nu ne-am ostenit pînă aici

și nu am tremurat mai adineauri, cățărați pe stînci, numai și numai ca să trăim o clipă senzația nelimitării, a infinitului... ? Omul trebuie să fi adulmecat infinitul cu sute de mii de ani în urmă, de cînd a început a privi în mod conștient cerul, cu puzderia lui de stele, mai ales în nopțile fără lună ! De atunci, a intuit el, în mod treptat, ceva misterios și imposibil de înțeles sau de atins, ceva minunat și înfricoșător, căreia treptat îi va spune *mulțime infinită, spațiu infinit, timp infinit*, ca mai tîrziu să desprindă de aici noțiunea exprimată prin cuvîntul *infinit*. Apoi, fiindcă și-a dat seama că infinitul nu va putea fi niciodată stăpînit prin observație directă sau prin experiență, omul a dat frîu liber gîndirii să-l iscodească ea, așa cum îi va veni mai la îndemînă.

— Cam așa trebuie să se fi întîmplat cu mult înainte ca geometria să se fi cristalizat într-o știință cu axiome fixate dinainte, cu teoreme care să decurgă din ele. Prin veacul al V-lea î.e.n. Zenon și-a formulat paradoxurile, dintre care azi se cunosc numai 4, acelea pe care, 100 de ani mai tîrziu, le enunță Aristotel ca să le combată, în *Fizica* sa.

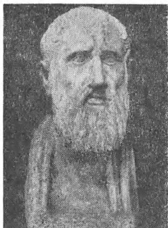
— Vorba proverbului : un nebun aruncă o piatră în baltă și 100 de învățați nu pot să o scoată !

— Se potrivește mai bine decît îți închipui, căci deși infinitul apare în geometrie de pe vremea lui Zenon și de atunci se va vorbi mereu de el, nimeni, pînă la sfîrșitul veacului al XIX-lea, nu a fost în stare să precizeze această noțiune. Se considera, îndeobște, infinitul ca o mărime nedefinit de mare — dacă era vorba de *infinitul mare* sau, nedefinit de mică, fără a fi însă egală cu zero, dacă era vorba de *infinitul mic*. Chiar Jules Tannery, subtil matematician francez, de la sfîrșitul veacului al XIX-lea și începutul celui de al XX-lea, scria : „Noțiunea de infinit, din care nu trebuie să se facă un mister, se reduce la aceasta : după fiecare număr întreg există un altul".

— Îmi place foarte mult și mi se pare extrem de clară această definiție !

— Probabil că așa i s-a părut și lui. Dar această definiție e departe de a răspunde considerațiilor moderne asupra infinitului. Ea se păstrează încă în concepția dinamică a unui infinit potențial, aceea imaginată de Aristotel cînd a atacat paradoxurile lui Zenon.

— Stai că încep să mă încurc. Ce-ar fi să discutăm problema infinitului începînd chiar cu paradoxurile lui Zenon ? Nu numai că mi le-aș aminti, dar privindu-le prin ochiul



Zenon

tău, le-aş vedea, poate, şi altfel. Aristotel le prezintă într-o anumită ordine, anume : *paradoxul dihotomiei*[1], al lui Ahile şi broasca ţestoasă, *Săgeata* şi, în fine, *Stadionul*. Am citit, nu ştiu unde, că Zenon era un ţăran autodidact şi că devenise prietenul lui Parmenide. Aşa s-a iniţiat el în problemele geometrilor, cărora le-a prezentat, în semn de omagiu, aceste flori — ca să folosesc imaginea ta de aseară.

— Drept să-ţi spun, nu prea văd ce aş mai avea eu de adăugat ! Ştiu că problemele acestea îţi plac şi cred că ai citit depre ele mai mult decît mine. Dar dacă asta ţi-e vrerea, poftim, să începem cu primul.

— Zenon afirmă că dacă spaţiul şi timpul s-ar divide la infinit, atunci mişcarea ar fi imposibilă. O dovedeşte arătînd că orice mobil care porneşte de la o extremitate a segmentului nu poate ajunge la cealaltă extremitate a lui decît trecînd prin mijlocul acelui segment, or ca să atingă acest punct trebuie să ajungă mai întîi la jumătatea noului segment format şi tot aşa înainte. Datorită divizibilităţii infinite, spune Zenon, mobilului îi trebuie un timp infinit ca să parcurgă această infinitate de segmente ! Ei bine, deşi ştiu că Zenon n-are dreptate, fiindcă experienţa mea de toate zilele, adică bunul simţ, îmi arată că mişcarea este posibilă, totuşi argumentaţia lui mă convinge. De ce ?

[1] *Dihotomia* : împărţirea în două părţi egale.

Bazîndu-se tot pe acest bun-simţ l-a combătut şi Aristotel pe Zenon, considerîndu-i paradoxul drept un paralogism[1]. Unde-i adevărul ?

— Adevărul se va lămuri de-abia înspre sfîrşitul veacului al XIX-lea, după ce vor apărea lucrările lui Dedekind şi Cantor—Georg, nu Moritz cel care a scris cele 4 volume de istorie a matematicii ! — Prin lucrările lor şi ale altora se vor lămuri multe probleme legate de mulţimile infinite şi se va preciza modul lor de comportare, desigur altul decît acela al mulţimilor finite. Neţinînd seamă de aceste fapte se ajunge, în mod cert, la paradoxuri. Aristotel nu cunoştea aceste lucruri, dar a bănuit ceva, fiindcă se temea de infinit şi chiar îi sfătuia pe matematicieni să se ferească de el.

— Însă Aristotel recunoaşte existenţa infinitului. Undeva chiar spune că dacă n-ar exista infinitul, nici numerele nu ar fi infinite şi timpul ar avea un început şi un sfîrşit ! Şi, îmi aduc vag aminte — de altfel nici n-am înţeles vreodată prea bine acestea — că el priveşte infinitul din două puncte de vedere. Cum şi în ce scop ?

— Ca să-l elimine mai uşor din discuţie ! Aristotel atribuia infinitului calitatea de *potenţialitate* şi nu de *actualitate*. Cu alte cuvinte, el considera, ca şi Jules Tannery, că infinitul este o mărime ce devine din ce în ce mai mare sau din ce în ce mai mică, dar se ferea să-l considere în act, adică în întregimea lui. E ca şi cum ai privi Pămîntul de pe Pămînt şi nu ridicîndu-te, aşa cum au făcut-o astronauţii, pînă la Lună, ca să-ţi apară de acolo, în totalitatea lui, ca o minge. Ca să se facă mai bine înţeles, Aristotel recurge şi la o imagine plastică : „despre un bloc de marmură, spune el, se poate afirma că *este o statuie în potenţialitate*, pentru că va deveni cîndva o statuie, pe cînd *ceva infinit în potenţialitate* nu este permis să se considere că va deveni *infinit în act* !" Şi acum, cred că ne putem întoarce la segmentul lui Zenon. El are o *lungime finită*, să o numim a. Această lungime finită poate fi descompusă într-o mulţime infinită de segmente :

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}\cdots\frac{a}{2^n}+\cdots$$

Deşi termenii sumei sînt în număr infinit, suma există şi este egală cu a. Aşadar, acest segment de lungime finită

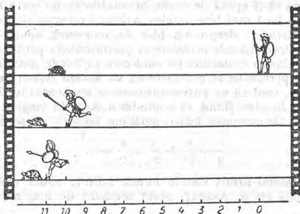
[1] *Para:* contra, pe lîngă şi *logos:* raţionament ; aşadar, un raţionament fals.

poate fi considerat ca „un infinit în potențialitate" și deci poate fi parcurs de un mobil într-un timp finit. Dar, dacă fac abstracție de existența segmentului finit și consider numai *mulțimea infinită ca atare*, adică mă refer la *infinitul actual*, în nemărginirea lui, atunci nici un mobil nu-l va putea străbate într-un timp finit, eu fiind obligat să-i urmăresc toate deplasările sale pe fiecare dintre aceste segmente infinite ca număr.

— Atunci totul e lămurit, mă mir că paradoxul a mai dăinuit. Se pare că e în adevăr un paralogism !

— Nu ! Matematicienii nu au arătat atîta ascultare ca tine. În infinitul actual există o realitate cu tendința de a se manifesta ca ceva întreg și mărginit, și matematicienii au vrut să-l cunoască mai îndeaproape. Ca și Adam, ei au cutezat să muște din măr, chiar cu prețul izgonirii din rai.

— Stai pe loc. Să terminăm întîi cu Zenon și pe urmă urcăm în rai. În al doilea paradox nu mai apare un singur element, ci două elemente în mișcare : Ahile și broasca țestoasă. Ahile cel iute de picior nu poate ajunge broasca țestoasă, care avea un avans de 100 de pași cînd a început întrecerea. Zenon arată că deși Ahile aleargă de 100 de ori mai iute ca broasca, atunci cînd el a făcut cei 100 de pași și broasca a făcut un pas, apoi, în timp ce Ahile face acest pas broasca face 1/100 din pas și așa mai departe. Admițînd că dreapta se divide la infinit, va rămîne mereu un spațiu



Ahile și broasca țestoasă

de netrecut între broască și el. Am impresia că acest paradox este o variantă a primului. Nu înțeleg de ce l-a mai enunțat ?

— Fiindcă, așa cum ai remarcat tu însuți, aici e vorba de două mobile. Zenon insistă asupra faptului că nu numai mișcarea absolută nu-i posibilă, dar nici mișcarea relativă (a unui mobil față de un altul tot în mișcare). Era necesară această precizare și vei vedea-o reluată și în celelalte două paradoxuri, despre care aștept să-mi vorbești.

— Am să o fac îndată, fiindcă acum am înțeles mecanismul acestui paradox. Nu-i așa că, și în acest exemplu numai numărul segmentelor parcurse de broască $\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...$ este infinit, pe cînd suma lor este finită și face exact $\frac{1}{99}$ dintr-un pas al lui Ahile ?

—Uite, controlează-mi calculul : $\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{99}$.

— Exact. Vreau să-ți precizez că în aceste două exemple Zenon *combate posibilitatea de împărțire nelimitată a spațiului și timpului*, amintindu-ți că ipoteza continuității spațiului și a timpului (și deci posibilitatea de a fi împărțite la infinit) era susținută de școala lui Aristotel. Din contra, pitagoreicii considerau că numărul (întreg) stă la baza tuturor fenomenelor și prin urmare spațiul și timpul trebuie privite ca formate din puncte și clipe, adică din unități indivizibile. Celelalte două paradoxuri combat ceastălaltă concepție și pe baza ei Zenon susține atît imposibilitatea mișcării absolute, cît și a celei relative.

— Atunci lucrurile încep să mi se clarifice. În cazul săgeții care, deși e azvîrlită din arc, nu zboară, ci stă pe loc, Zenon arată că aceasta se întîmplă pentru că o clipă săgeată se află într-un spațiu egal cu el însuși și deci, în clipa aceea, săgeata este în repaus. Dar, de acolo ea nu se mai poate mișca, deoarece clipa este indivizibilă ! În locul săgeții în cel de al patrulea paradox, Zenon consideră serii de corpuri egale ca mărime și număr așezate față în față, deplasîndu-se cu aceeași viteză și în sensuri opuse. Imaginea ar putea fi asemuită cu două echipe de sportivi, așezate în monom, una în fața celeilalte, gata să alerge pe un stadion. Din cauza aceasta paradoxul a și căpătat numele de *Stadion*. Ca să

fiu mai clar, să figurez aceste echipe. În prima linie pe care am să o notez cu (0) fixez poziția inițială a celor două echipe, înainte de a începe alegerea. În celelalte două figurez echipele după ce s-a început alergarea, fiecare echipă depășind poziția inițială numai cu un singur loc, prima la stînga și a doua la dreapta :

(0) : a_0, b_0, c_0, d_0...
(1) : a_1, b_1, c_1, d_1...
(2) : a_2, b_2, c_2, d_2...

În prima echipă, b_1 se află sub a_0 și la fel c_1 sub b_0 etc. Așadar, fiecare alergător a înaintat cu un loc față de poziția inițială. În a doua echipă însă, a_2 se află sub c_1, b_2 sub d_1 etc. Deci fiecare alergător din această echipă a înaintat cu două locuri în loc de unul, față de partenerii din prima echipă. Dar pentru a trece peste două locuri e necesar să se cheltuiască un timp dublu și totuși ambele echipe pun același timp ca să revină la poziția inițială ! De aici rezultă contradicția și deci imposibilitatea mișcării : dublul timpului este egal cu jumătatea lui, adică presupusa clipă indivizibilă a fost împărțită în două ! Ei, acum explică-mi și mie care a fost intenția lui Zenon, formulînd aceste paradoxuri ? Cu ce scop ?

— Vezi, îmi ceri prea mult. Nici pînă azi matematicienii și logicienii nu au lămurit cu ce scop anume a inventat Zenon paradoxurile sale. Unii sînt de părere că el a intenționat să-i combată pe pitagoreici. În privința aceasta aș vrea să-ți recomand o carte foarte interesantă, pe care am citit-o mai demult, scrisă de Hans Hahn[1] în care se discută, printre altele, și problema, veche dar veșnic nouă, a cunoașterii Universului. El insistă acolo asupra problemei despre natura celor două surse de informație : 1) experiența și observația, 2) gîndirea — ambele la fel de necesare în procesul cunoașterii. De pildă, legile reflexiei sau ale refracției pot fi observate direct și stabilite prin experiență, pe cînd orbita Lunii trebuie găsită pe cale teoretică, deci prin gîndire. La fel, un măr îl cîntărești direct, dar Luna sau Pămîntul le cîntărești pe cale teoretică, folosind gîndirea. Mai mult, fiindcă gîndirea a fost aceea care a corectat iluziile provocate de simțuri, aceasta a făcut pe unii filozofi să-și formuleze rezerve față de rezultatele obținute pe cale experimentală. Dar

[1] Hans Hahn : *Logique, mathématique,* 1935.

despre iluziile provocate de gîndire nu s-ar putea discuta ? Ei bine, n-ar fi exclus ca Zenon să fi avut tocmai această intenție și de aceea să fi căutat argumente cu care să combată cele două curente de atunci ale gîndirii matematice, ambele la fel de puternice.

Dar ar putea fi și altfel ! De pildă, unii filozofi moderni sînt de părere că Zenon a intenționat să atragă atenția asupra contradicțiilor interne ce se află în noțiunile matematice de spațiu, timp, continuitate și mișcare ! Singurul fapt cert este că prin aporiile[1] sale, Zenon a precizat, dacă nu cumva a pus chiar, bazele gîndirii dialectice în general și în matematici, în particular, exercitînd o influență asupra gîndirii ulterioare a matematicii grecești. Căci, după cum intenționam să-ți spun mai înainte, atunci cînd m-ai întrerupt, chiar din vremea lui Aristotel, matematicienii n-au ținut seama de avertismentul său cu privire la izgonirea infinitului actual din speculațiile teoretice ! Proclus, comentator al *Elementelor* lui Euclid, și unul dintre ultimii reprezentanți ai școlii matematice din Atena (a trăit prin veacul al V-lea), relatează următorul paradox : dacă un diametru dă naștere la două semicercuri și dacă se duc din centrul cercului o infinitate de diametre, atunci se obțin de două ori mai multe semicercuri decît diametre. Proclus încearcă să explice această pluralitate a infinitului, imitînd raționamentul lui Aristotel. N-a fost, desigur, nici el prea convingător. Și Galileu, în *Dialoguri despre știința nouă*, dezbate această problemă făcîndu-l pe Sagredo să se întrebe îngrijorat, cum se poate explica faptul că mulțimea numerelor care sînt pătrate perfecte : 0, 1, 4, 9, 16, ... deși reprezintă numai o parte din mulțimea numerelor naturale, este și ea infinită ? La aceasta Salviati răspunde că, după părerea lui, atributele : *egal*, *mai mare* sau *mai mic* nu sînt aplicabile mulțimilor infinite, ci numai acelora finite.

— În aceeași ordine de idei, drept să-ți spun că-mi pare paradoxal faptul că două cercuri concentrice sînt formate din mulțimi egale de puncte. Faptul se stabilește foarte ușor dacă duc razele, totuși, pentru că cercul exterior poate fi oricît de mare față de cel interior, el ar trebui să aibă infinit mai multe puncte !

— Acest paradox și multe altele în care apare infinitul actual au frămîntat pe marii matematicieni din veacul al

[1] *Aporie* : dificultate, logic fără ieșire.

XVIII-lea și al XIX-lea. În prima jumătate a veacului al XIX-lea, Gauss scria unui prieten, arătîndu-i îngrijorarea sa față de încercările de a se introduce în raționamentele matematice *infinitul*, alături de mărimea finită: „Infinitul este numai un fel de a vorbi" spunea el și, după cîte îmi amintesc, adăuga că nu va fi pericol de nici o contradicție atîta vreme cît omul finit nu va face greșeala să privească infinitul ca pe ceva limitat!

— Așadar, avertismentul lui Aristotel, repetat peste cîtă vreme?

— Peste 300 + 1 800 de ani; cam 21 sau 22 de veacuri. Ai fi tentat să spui că în acest interval totul a rămas pe loc! Și totuși, cîtă diferență între cunoștințele matematice dintre extremitățile lui. Însă scrisoarea lui Gauss nu a cunoscut-o atunci nimeni, în afară de acela căruia îi fusese adresată.

— Parcă, dacă ar fi fost cunoscută, s-ar fi schimbat ceva?

— Desigur că nu. Dovadă că după cîțiva ani apare, postum, cartea lui Bolzano: *Paradoxurile infinitului*, în care, după cum arată și titlul, sînt culese și prezentate în mod destul de amănunțit multe probleme de acest gen. Prin numeroase exemple el caută să evidențieze acea proprietate a mulțimii infinite constatată și de Galileu, că o parte a ei este egală cu întregul[1] și o dovedește bazîndu-se pe corespondența, element cu element, între mulțimea infinită considerată și partea ei. În felul acesta, deși Bolzano nu stabilește o definiție a noțiunii infinit, el contribuie la înțelegerea conținutului acestei noțiuni.

— Vrei să spui că se poate da o definiție, propriu-zisă, a mulțimii infinite?

— Da. A făcut-o Richard Dedekind, pornind tocmai de la ideile lui Bolzano: „Un sistem *S* este infinit dacă este de aceeași putere cu o parte proprie a sa. În caz contrar, *S* este un sistem finit."

— Fantastică definiție! Așadar, iată că *omul finit*, cum îl caracterizează Gauss, deapănă infinitul și-l face ghem! Știi că, în această nemaipomenită îndrăzneală, eu văd semnele prevestitoare zborului cosmic? Omului finit nu-i mai ajunge planeta pe care trăiește, e însetat de spațiu infinit, vrea să contemple Pămîntul de pe Lună și, dacă se va putea, de mai de departe încă!

[1] Azi se folosește termenul de „mulțimi cu aceeași putere".

Georg Cantor



Ascultă :

„Secunda-ntrece veacul și timpul se-ncovoaie
Pe-o sfoară cît e firul de păr și se agață
Vecia, nesfîrșitul, pe un crîmpei de ață.
Se-nalță slabul, omul pe aripi în tării
Și-aduce pe acolo noi legi și mărturii!"[1]

Spune-mi cine ar fi putut exprima mai bine cele ce am auzit, decît Arghezi în aceste versuri?

— Tot Arghezi, în următoarele versuri, adresate omului :

„Și cumpănit pe cîte o talpă și-un călcîi
Ai fost pe verticala înaltă cel dintîi.
Îți ridicasei capul de jos, chemat de soare,
Și începu îndată și cugetul să-ți zboare.
Tu ți-ai învins pămîntul, mormîntul și destinul."[2]

— Atunci sîntem chit! Spune-mi ce s-a întîmplat după ce „slabul, omul" a definit infinitul!

— Au urmat cercetările proprietăților mulțimilor infinite de către Georg Cantor, care independent de Dedekind, fusese și el atras, mai de demult, de aceste probleme. Articolul publicat de Cantor, asupra mulțimilor infinite, a apărut pentru unii ca un manifest revoluționar, pentru alții, ca opera

[1] T. Arghezi : *Cîntare omului* (Cel ce gîndește singur).
[2] T. Arghezi : *Cîntare omului* (Pînă atunci).

unui nebun. Interesant este că şi unii, şi alţii, nu erau departe de adevăr!

— Cred şi eu, omul de rînd va atribui unui nebun toate încercările de a-l muta din bîrlogul său

— În cazul de faţă, însă, s-a întîmplat ca Georg Cantor să manifeste în adevăr accese de demenţă, şi el însăşi a remarcat că spiritul lui devenea extrem de lucid cînd revenea dintr-un atare atac. În acele perioade intermitente de linişte a dezvoltat el cele mai abstracte părţi din teoria mulţimilor, astăzi capitol de bază în matematica modernă. În acest prim articol, Cantor stabilea două rezultate capitale pentru mulţimile infinite. Uşor de urmărit şi de înţeles, dacă mă ajuţi şi tu.

— N-am decît această dorinţă. Spune-mi ce doreşti?

— Să ne fixăm asupra mulţimilor finite de elemente. Admiţînd că e vorba de mulţimea primelor 11 numere pare, te rog să-mi numeşti un element care aparţine mulţimii şi un altul care nu aparţine.

— 2, 6, 18, 20 aparţin mulţimii, iar dacă nu-l socotesc şi pe zero ca făcînd parte din mulţime, atunci intră şi 22, dar nu 24 nici 1, 7, 9! Eşti mulţumit?

— Da. Acuma spune-mi ce semnificaţie are, în acest caz, pentru tine numărul „11"?

— El este numărul elementelor din mulţime şi, dacă vrei, el este acela care proiectează, în mintea mea, mulţimea considerată.

— Cantor numea acest număr, prin care se exprima totalitatea elementelor dintr-o mulţime finită, „număr cardinal" sau „puterea" mulţimii.

— Noţiunea de *număr cardinal* o cunosc din şcoală; desigur că 11 este un număr cardinal, pe cînd al unsprezecelea este un *număr ordinal*, acesta din urmă arătîndu-mi ordinea. De pildă, numărul 20 este al 10-lea număr din mulţimea despre care vorbim! Dar, despre *putere*, n-am mai auzit pînă acum.

— Reţinem doar că, în cazul mulţimilor finite, *puterea mulţimii* coincide cu *numărul cardinal* care stabileşte din cîte elemente e formată mulţimea.

Să numim încă echivalente mulţimile care au aceeaşi putere şi admite că ai în faţa ta două mulţimi de acest fel. Cum stabilim echivalenţa lor?

— Nimic mai simplu! N-am decît să văd dacă pot împerechea, unul cu altul, elementele din cele două mulţimi. Dacă nu rămîne nici un element stingher, zic că cele două mulţimi sînt echivalente şi deci au acelaşi număr cardinal!

— Stai! În felul acesta amesteci operațiile! În prima operație despre care mi-ai vorbit ai aplicat *principiul corespondenței biunivoce* — element cu element — și nu le-ai numărat. Așadar, nu știi nimic despre numărul lor cardinal. Iar cînd te referi la numerele cardinale, principiul corespondenței biunivoce nu mai are de ce fi amestecat! În acest caz, tu ai numărat, pur și simplu, elementele dintr-o mulțime apoi ai repetat operația cu elementele din cealaltă mulțime și ai constatat că ai găsit același număr cardinal!

— Ei! Bătaie de apă în piuă! Rezultatul meu este același fie că le număr, fie că stabilesc corespondența elementelor...

— În cazul mulțimilor finite, dar nu și în cazul acelora infinite! Pe acelea cum le numeri? Or, tocmai aici intervine ideea genială a lui Georg Cantor. El a creat un simbol care să reprezinte puterea mulțimii infinite a numerelor întregi și l-a notat cu prima literă a alfabetului ebraic: alef, urmată de indicele zero ($\aleph_0$). Alef zero este puterea mulțimii infinite a numerelor întregi, deci este și numărul ei cardinal.

— Asta-i drept nebunie! Cine-i acest număr? Cînd spun 10 sau 1 739 sau 9 854 263 sau oricare alt număr vreau, știu despre ce vorbesc, cunosc aceste numere și le pot deosebi de oricare altele, dar alef zero...?

— Nu-i chiar așa! Îți închipui numai că le cunoști și că le poți deosebi. Admite că pun în fața ta două grămezi de nuci, una avînd 133 de nuci, alta 134. Oare crezi că, privindu-le, ai să poți deosebi pe cea mai mare de cealaltă? Recunoaște că nu! Și acum să iau chiar numărul tău, cel mai mare: 9854263. L-ai format așa, la întîmplare, dar cum ți-l reprezinți tu în minte? Altfel decît prin aceste cifre? Îl vezi? Îți spune ceva deosebit, ție, nematematician (căci unui îndrăgit de cifre i-ar putea șopti multe particularități de ale lui), — uite despre acestea aș vrea să stăm cîndva de vorbă să-ți spun povestea lui Ramanuyan de pildă... dar nu acum. Acum...

— Nu sînt de părerea ta. Cu acest număr, chiar dacă nu-mi spune nimic deosebit, eu pot opera, îl pot aduna cu altul, îl pot împărți sau înmulți, dar cu alef zero ce pot face? Ce fel de întreg este el?

— Întreg? Dar nici vorbă nu-i să fie întreg! Dacă ar fi întreg, oricît de mare, înseamnă că ar fi un număr finit, dar acesta e de altă natură decît numerele întregi, adică finite, fiindcă le depășește. Alef zero sare peste pragul finitului. El este un număr *transfinit* și fiind numărul cardinal al mulțimii infinite, este chiar *infinitul real, infinitul actual*, contra

căruia a tunat şi fulgerat Aristotel, Gauss şi atîţia şi atîţia alţi matematicieni de seamă.

— Mare dreptate au mai avut! Cum vrei să împac, în mintea mea, faptul că prin alef zero număr toată mulţimea infinită a numerelor întregi, cînd îmi spui că după ce am făcut numărătoarea, nu găsesc un număr întreg? Ce aflu? Un număr fracţionar sau un număr iraţional?

— Nu! un cu totul altfel de număr decît acelea finite: oricare ar fi forma lui, găseşti un număr *transfinit*! Priveşte-l deocamdată ca pe un simbol, aşa cum π este simbolul prin care se reprezintă raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său.

— Bine, am să-ţi fac acest hatîr, ca să văd unde vrei să ajungi!

— Nu bănuieşti? Te iau în spate şi, iată-ne dincolo de bariera finitului... Avem în faţă două mulţimi infinite, să zicem mulţimea numerelor întregi şi mulţimea numerelor pare, adică în realitate numai o parte sau o submulţime a mulţimii numerelor întregi. Să stabilim care este puterea acestei submulţimi. De numărat nu mai putem număra, aşa că rămîne numai metoda corespondenţei, element cu element.

— Ştiu unde vrei să ajungi. Mulţimile acestea sînt echivalente, fiindcă pot realiza corespondenţa element cu element, punîndu-le unele sub altele:

1, 2, 3, 4, 5,....
2, 4, 6, 8, 10,....

Ba mai mult, tot aşa stabilesc că şi submulţimea numerelor impare este echivalentă cu aceea a numerelor întregi, sau chiar şi cu mulţimea pătratelor numerelor întregi:

1, 4, 9, 16,.....

— Aceeaşi proprietate o are orice mulţime infinită, în care elementele ei se pot ordona în aşa fel ca să fie în corespondenţă cu acelea din şirul numerelor naturale1, 2, 3,.. Cantor a numit asemenea mulţimi *mulţimi numărabile*. Toate au aceeaşi putere: alef zero!

— E adevărat că rezultatul, prin fantasticul lui, este extraordinar de frumos. Dar Cantor întăreşte şi definiţia dată de Dedekind: „O mulţime este infinită dacă o parte a ei este asemenea cu cea întreagă"! Aş putea spune: partea este parte integrantă a ei însăşi!

— Exact așa. Și dacă vrei să mai zăbovim prin acest ținut, vom face și puțină aritmetică. Să vedem cît face $\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0$.

— Înseamnă că se dau trei mulțimi numărabile. Bănuiesc că, după cele spuse acum, acestea se vor constitui ca părți ale unei singure mulțimi. Dar cum?

— Uite cum : fie $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots a_n\ldots)+(b_0,\ b_1,\ b_2,\ldots b_n)+$ $+(c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots c_n\ldots)$ Le voi grupa începînd cu primul element din fiecare mulțime, apoi al doilea, al treilea, adică am să scriu $(a_0,\ b_0,\ c_0,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ldots a_n,\ b_n,\ c_n\ldots)$.

— În adevăr, așa ai reușit să le pui într-un singur șir, adică să formezi o singură mulțime numărabilă și deci dacă dincolo, la noi acasă, $1+1+1=3$, aici $\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

— Ba am să-ți arăt ceva și mai fantastic! Am să adun o *mulțime infinită* de mulțimi numărabile.

— Acuma nu mai mă sperii! Prin generalizare, știu că vei obține un altfel de alef!

— Ba cred că ai să te sperii, și încă rău de tot! Obțin același alef zero! Ca să te conving, am să consider mulțimea numerelor raționale. Ea este formată dintr-o infinitate de șiruri finite de fracții, pe care ca să ți le aduc în față, am să le scriu aici, punînd în fiecare rînd numai fracțiile cu același numitor :

$$\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}\ \frac{5}{1}\ \frac{6}{1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{n}{1}\ldots$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{5}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{n}{2}\ldots$$

$$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{n}{3}\ldots$$

$$\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{n}{4}\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

După cum vezi, așa nu se pierde nici o fracție, iar tabloul pe care l-am format este un pătrat deschis la dreapta și în jos. Și-acum să transformăm tabloul într-un șir, cu alte cuvinte, într-o mulțime numărabilă. Aceasta se poate face în mai multe feluri. Iată unul dintre procedee: Încep de la primul număr rațional $\frac{1}{1}$ și trec la al doilea $\frac{2}{1}$ după care mă cobor pe diago-

nală la $\frac{2}{1}$ continuînd să cobor la $\frac{1}{3}$ şi apoi să urc pe diagonală la $\frac{3}{1}$ de unde trec la $\frac{4}{1}$ şi iar cobor pe diagonală pînă la $\frac{1}{4}$. Formez astfel şirul pe care-l pot numerota cu 1, 2 3,....

$$\frac{1}{1} \frac{2}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{2}{2} \frac{3}{1} \frac{4}{1} \frac{3}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{2}{4} \ldots$$

— Aşadar o mulţime infinită de mulţimi infinite numărabile formează o mulţime numărabilă şi are aceeaşi putere alef zero?

— Da. Ai aflat astfel că mulţimea fracţiilor $\frac{p}{q}$ (p şi q numere întregi) deşi infinit mai numeroasă decît mulţimea numerelor întregi, este echivalentă cu ea, fiind ca şi ea, numărabilă.

— Admit că cele ce am aflat acum îmi taie răsuflarea. Exact ca răsăritul soarelui de azi dimineaţă. Mă întreb numai, la ce cabană ai putea să mă mai duci acum, ca să mă încălzesc, căci parcă şi mintea mi-a îngheţat!

— Cui cu cui se scoate. Hai la izvorul cel rece, să bem puţină apă de aceea care-ţi îngheaţă buzele şi creierul. Şi mie mi-au cam amorţit oasele la masă. De altfel, cred că ar fi şi timpul să ne pregătim de întoarcere!

— Unde? am întrebat fără să mă gîndesc. De-abia după ce am auzit cuvîntul ce-l rostisem mi-am amintit de Cîmpulung, de vacanţa care fuge, de reîntoarcerea la Iaşi.

Prietenul meu a înţeles tragedia care se petrecea în mine şi a prins a rîde :

— De ce-ţi pare rău? Nu vezi că-i mai bine acolo jos? Infinitul îi bun de sorbit cu linguriţa. Aşa dintr-o dată...te îngheaţă!

Da, mi-am zis, era mai cuminte să ne pregătim de coborît. Ziua era senină şi nu mult după această discuţie ne-am luat rămas bun şi de la Pietrele Doamnei.

— De-abia la primul popas am cerut cîteva lămuriri :

— Cred că dacă ai oarecare abilitate poţi transforma orice mulţime de mulţimi infinite într-o mulţime numărabilă şi ajungi aşa mereu la acelaşi alef zero. Nu înţeleg de ce a mai avut nevoie Cantor de indicele zero, odată ce ai mereu de-a face cu acelaşi alef zero?

— În întrebarea ta s-au strecurat o mulţime de inexactităţi, pe care trebuie să le îndrept înainte de a-ţi răspunde,

mi-a spus Teodor Solonar. Mai întîi mi se pare că pentru tine o mulţime infinită este şi numărabilă?

— De ce nu? Aşez elementele într-o anumită ordine şi le numerotez : primul a_1 al doilea a_2, şi aşa mai departe.

— Ei vezi? Aicea-i aici! Dacă orice mulţime finită se poate număra, nu toate mulţimile infinite sînt numărabile.

— În articolul despre care ţi-am vorbit, Cantor stabileşte două rezultate surprinzătoare : primul că mulţimea numerelor algebrice este numărabilă şi al doilea că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă. Dar să-ţi spun mai întîi ce se înţelege prin număr algebric, deşi poate că ai ghicit. Este algebric un număr care verifică o ecuaţie algebrică de gradul n întreg, cu coeficienţi întregi. De pildă, rădăcinile ecuaţiei : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots \dots + a_n = 0$, în care a_0, $a_1, \dots a_n$ şi n sînt numere întregi şi ele se numesc numere algebrice. Mulţimea numerelor algebrice este cu mult mai numeroasă decît aceea a numerelor raţionale, pe care o cuprinde ca pe o parte a ei — fiindcă aceasta din urmă este formată numai din rădăcinile ecuaţiilor algebrice de gradul întîi : $a_0x + a_1 = 0$, cu a_0 şi a_1 numere întregi. Totuşi, Cantor a găsit posibilitatea de a pune numerele algebrice în corespondenţă cu mulţimea numerelor întregi, de unde a dedus că această mulţime e numărabilă Mulţimea numerelor reale este însă şi mai densă Ea cuprinde, pe lîngă numerele algebrice, toată infinitatea numerelor transcendente, printre care tu cunoşti numerele „π" sau „e" baza sistemului de logaritmi neperieni Or, această mulţime fiind numărabilă, puterea ei se cere exprimată printr-un alt alef, să-i zicem alef unu şi să-l considerăm număr transfinit de un ordin superior lui alef zero

— Dragă bădie, înţeleg că o mulţime infinită este numărabilă şi ştiu că o pot dovedi prin corespondenţa despre care tot vorbim, dar mi se pare absurd să dovedesc contrariul!

— Cam exagerat cuvîntul pentru o demonstraţie aşa de simplă şi naturală. Uite, stai să desfac hîrtia aceasta de la pachetul de ţigări ce se termină acum şi am să-ţi aştern pe ea o demonstraţie de mai mare dragul:

Consider toare numerele reale dintre zero şi unu şi presupun, prin absurd, că această mulţime infinită este numărabilă. Aşadar să încep ordonarea lor :

$0, a_{11}\ a_{12}\ \ a_{13} \dots\dots a_{1n} \dots$

$0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots\dots a_{2n} \dots$

....

$0, a_{p1}\ a_{p2}\ a_{p3} \dots\dots a_{pn} \dots$

Ai înţeles, cred, că am notat fiecare număr printr-o fracţie zecimală infinită, iar ordinea în care le pun este stabilită de primul dintre cei doi indici. Aşadar, numărul al 5-lea este 0, a_{51}, a_{52}..., al doilea indice fiind acela care stabileşte poziţia uneia dintre cele 9 cifre din numărul respectiv. Ar însemna că în acest tablou trebuie să găsesc toate numerele dintre 0 şi 1, dacă ele sînt numerotabile. Or, am să-ţi arăt că cel puţin un număr nu se găseşte printre ele, deşi el există cu siguranţă. Uite-l:

$$0,\ a_{1m}, a_{2r}\ a_{3g} \ldots a_{p} \ldots$$

Acest număr se deosebeşte de primul număr, fiindcă în loc de a_{11} se află : a_{1m}, unde prin a_{1m} am notat oricare altă cifră din cele două în afară de a_{11}. La fel el se deosebeşte de al doilea număr prin cifra a doua : a_{2r} în loc de a_{22} şi aşa mai departe. Ce ai să-mi obiectezi ?

— Nimic. În cele ce-mi spui aflu tentaţie şi gust de fruct oprit. Văd că adepţii lui alef nu mai au ce căuta în raiul numerelor finite.

— Nici truda de a se adapta noilor condiţii nu a fost mai mică decît a primilor izgoniţi. Chiar noţiunea însăşi de mulţime nenumărabilă este zguduitoare, deoarece contrazice bunul simţ. I-a revoltat pe matematicieni aşa cum te-a revoltat şi pe tine la început, fără însă să-i fi liniştit.

— Cum ai reuşit să o faci tu, cu mine. De ce?

— Pentru că, după cum se ştie de foarte multă vreme, mulţimea numerelor reale este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea punctelor de pe orice dreaptă pe care s-a fixat o origine, un sens şi o unitate de măsură.

— Ştiu. Fiind aleasă unitatea de măsură şi sensul, oricărui segment astfel măsurat îi corespunde numărul care arată lungimea lui şi invers, orice număr poate fi considerat ca lungime a unui anumit segment de pe dreaptă. Iată dar corespondenţa biunivocă între mulţimea numerelor reale şi punctele dreptei.

— Da, şi această corespondenţă ne-a obişnuit să credem că punctele de pe dreaptă se succed în ordine şi dacă aleg un punct de pe ea, pot afirma cu siguranţă despre un altul, de pe aceeaşi dreaptă, dacă se află la stînga sau la dreapta lui. Dar dacă mulţimea punctelor de pe dreaptă nu-i numărabilă, ceea ce părea indiscutabil devine o iluzie. Dar nu-i numai atît. Ai văzut că în aritmetica numerelor transfinite $a+a=$

$=a$, spre deosebire de rezultatul obișnuit $a+a=2a$. Dar dacă numărul transfinit este, cum presupunem, o prelungire, dincolo de infinit, a numărului finit, atunci aceste două rezultate, care deocamdată se contrazic, ar trebui puse de acord. Cum? Desigur că revăzînd și regîndind întregul conținut al aritmeticii, începînd chiar cu definiția numărului întreg. Și, în adevăr, așa s-a procedat. Pe la sfîrșitul veacului trecut, Gottlob Frege, matematician și logician, bazîndu-se pe teoria mulțimilor stabilită de Cantor și alții, definește noțiunea de număr întreg natural. Îți amintești, cred, că două mulțimi infinite aveau, după Cantor, aceeași putere...

— Desigur! Aveau aceeași putere dacă se putea stabili o corespondență biunivocă între elementele lor. La fel ca în cazul mulțimilor finite, unde, dacă se poate realiza corespondența biunivocă între elemente, atunci acele mulțimi au același număr cardinal!

— Ei bine, Frege încearcă să dea noțiunii de număr cardinal al unei mulțimi un înțeles mai precis decît acela pe care l-a dat Cantor și de aceea numește cardinalul unei mulțimi M, finită sau infinită, mulțimea tuturor mulțimilor avînd aceeași putere cu M.

— Dă-mi un exemplu, căci așa nu mai înțeleg nimic.

— Să considerăm mulțimea degetelor de la o mînă normală. Cu ajutorul ei pot pune în corespondență biunivocă alte mulțimi egale. Din toate aceste mulțimi se desprinde ca alt element comun lor noțiunea abstractă de mulțime a tuturor mulțimilor care, puse în corespondență biunivocă cu mulțimea degetelor de la o mînă normală, le epuizează pe toate. Această mulțime a tuturor mulțimilor, avînd aceeași putere cu mulțimea degetelor de la o mînă normală, definește numărul cardinal 5. Pe baza acestei definiții, Frege lucrează sistematic ani de zile, stabilind toate proprietățile numerelor întregi și publicîndu-și parțial rezultatele, înainte de a le închega în volum. Dar acum, încet, încet, hai spre casă că ne-am odihnit destul și pe drum îți voi spune ce i s-a întîmplat prietenului nostru Frege.

O bucată de drum am ascultat păsărelele, pe urmă am urmărit un șarpe care ne-a tăiat drumul, pierzîndu-se în desiș și, după ce a stins bine mucul de țigară ce a mocnit un timp în colțul gurii, Teodor Solonar a continuat:

— Trebuie să știi că nu numai Frege lucra în această direcție. La primul Congres Internațional al Matematicienilor, care a avut loc la Zürich în 1897, teoria mulțimilor a fost

unanim recunoscută ca avînd remarcabile aplicații în *Analiza matematică*. Independent de Frege, se ocupa cu aceeași problemă și Bertrand Russell. El a ajuns la aceeași definiție a numărului întreg, însă spre deosebire de Frege, a observat că terenul pe care sprijinea întreaga construcție aluneca : noțiunea de mulțime a tuturor mulțimilor fiind paradoxală !

— Cum vine asta?

— Iată cum : o mulțime poate să se conțină pe ea ca element sau să nu se conțină. De exemplu : după definiția lui Frege, numărul zero este mulțimea tuturor mulțimilor care nu cuprind nici un element. Așadar, mulțimea zero nu se cuprinde pe ea însăși ca element. Să considerăm însă mulțimea tuturor mulțimilor de noțiuni abstracte. Această mulțime este tot o noțiune abstractă, deci ea se cuprinde ca element al acestei mulțimi. Și acum iată paradoxul stabilit de Russell :

„Cum este mulțimea T a tuturor mulțimilor ce nu se cuprind ca element?"

1. Presupunem că T aparține mulțimii ca element al ei. Dar asta înseamnă, prin definiție, că T este una dintre mulțimile care nu se cuprind ca element.

2. Presupunem că T nu aparține mulțimii ca element al ei.

Atunci T se conține ca element, fiind o mulțime ce nu se cuprinde ca element !

— Extraordinar! Dar acesta este chiar paradoxul lui Epimenide!

— Așa și-a spus și Russell cînd i-a scris lui Frege, arătîndu-i-l!

— Și Frege ce-a făcut?

— Ce să facă? Lucrarea sa era sub tipar și avea destule alte calități pentru care merita să fie tipărită. A tipărit-o adăugînd, pe ultima filă, ceva cam așa : „Nimic nu-i mai dureros pentru un om de știință decît să-și vadă temelia operei sale năruită, chiar în clipa cînd a considerat că a terminat-o"!

— Știi ce rău îmi pare!

— Dar de ce? În aceste înfrîngeri stă tocmai puterea și frumusețea matematicienilor. E foarte adevărat că teoria mulțimilor a dus la o criză violentă care a zguduit din temelii lumea matematică multe decenii. Dar problemele care se puneau păreau atît de grandioase încît David Hilbert, unul dintre cei mai aprigi sprijinitori ai acestor probleme, a spus : „Teoria lui Cantor îmi pare punctul cel mai admirabil al spiritului

matematic. Nimeni nu ne va alunga din paradisul pe care Cantor l-a creat pentru noi". Vezi dar că, urmînd exemplul primilor oameni şi matematicienii şi-au creat un nou paradis, sau, mai bine zis, şi-l creează mereu, fiindcă nu toţi îl văd la fel şi nici nu aleg aceleaşi mijloace de realizare. Numai că aceste probleme mă depăşesc.

— Se poate. Mie mi-e de ajuns să ştiu că dacă te avînţi în regiunile matematice stăpînite de mulţimile infinite, rişti să te înfrunte un paradox.

— În privinţa asta, iar am să te contrazic. Rişti să te înfrunte un paradox şi în regiunile cu mulţimi finite! Află că tot Russell a stabilit şi următorul paradox, de data aceasta legat de o mulţime finită de numere. Uite-l : consider mulţimea tuturor numerelor determinate prin mai puţin de 16 cuvinte. O asemenea mulţime este finită căci fiecare dintre numerele vizate necesită un număr finit de cuvinte ca să fie exprimat.

— Să-mi formez un exemplu : „Douzeci şi trei milioane patru sute de mii trei zeci", pînă aici am 11 cuvinte, mai am drept la 4 : opt sute cinci zeci.

— Fie. Desigur că poţi considera şi un număr exprimat prin 5 cuvinte sau şi de un singur cuvînt, toate aceste numere fac parte din grămada considerată. Acuma iată paradoxul : „Fie *N* cel mai mic număr întreg care nu poate fi definit prin cincisprezece cuvinte". Prin această propoziţie am definit perfect un număr care face parte din mulţimea considerată, fiindcă el este definit prin exact 15 cuvinte. Dar, în acelaşi timp, se afirmă că acest număr nu poate fi definit prin 15 cuvinte!

— Lasă-mă în pace! Vrei să-ţi rîzi de mine cu asemenea calambururi?

— Nu rîd deloc. Lucrurile sînt foarte serioase şi stîrnesc multă bătaie de cap şi nelinişte. Altora. Ţie, cred că nu? Nici mie! Ca dovadă că n-am mai citit nimic demult în legătură cu această problemă, despre care ţi-am spus tot ce am ştiut! Acum fac un plan, să lăsăm drumul marcat şi să o luăm pe cărăruia asta, care taie mai de-a dreptul.

— Bine, sper că nu ai de gînd să ajungi iar la „Moara dracului", ca atunci cînd am rătăcit drumul! După atîtea paradoxuri, eu, drept să-ţi spun, n-aş renunţa aşa de uşor la „drumul lung şi cunoscut"! Mai ales că aş vrea să-mi notez cînd vom ajunge acasă, vreo două-trei cărţulii, aşa mai uşurele, cu *Logică matematică*, *Teoria mulţimilor*... aşa de curiozitate...

PROBLEMA FLORENTINĂ

Cînd am pornit de acasă ca să urcăm Tomnatecul, Cîmpulungul nu se trezise din somn. Răsăritul soarelui ne-a prins pe cînd intram în pădurea Deei.

— Cu cîtă bucurie și căldură te primește pădurea asta de îndată de i-ai trecut pragul! Plescăitul zburdalnic al acestei cascade în miniatură, cîntecul păsărelelor răsunînd dintre ramurile brazilor, îngrijorați parcă să nu ne intimideze cu înfățișarea lor maiestuoasă...

— Semn rău, m-a întrerupt prietenul meu. Ai început-o prea de dimineață cu sentimentalisme. Ori poate că ți se trage de la cartea pe care o citeai?

— S-ar putea, deși în ea nu era vorba de vreun călduț conflict sentimental, cum presupui, ci de o problemă pe care aș dori s-o discutăm.

— Anume despre ce?

— Despre înstrăinarea omului.

— Atunci spune-o lămurit, bădie, și nu mai umbla cu introduceri poetice. Înstrăinarea omului? Față de cine? De societate sau de el însuși? Fiindcă, dacă-i vorba de înstrăinarea omului față de el însuși, va trebui să ne abatem și prin astronomie. Căci în acest din urmă caz, biata ființă umană se simte singură în tot Universul, chiar și acum, cînd e așa de aproape să-și găsească prieteni prin alte planete...

— Hai lasă zeflemeaua, l-am oprit eu. Nu te îndreptățește la aceasta faptul că, pentru tine, oricînd și în orice împrejurări, doi și cu doi fac patru, că așa a fost și cu 100 000 de ani în urmă și va rămîne la fel și peste alți 100 000 de ani, indiferent dacă în trecut omul locuia prin păduri, caverne sau peșteri și dacă în viitor se va delecta făcînd excursii pe fundul oceanelor sau către circurile lunare, și că...

— Stai, că iar te-ai înfierbîntat! Doi și cu doi nu fac, nu au făcut și nu vor face întotdeauna patru ! Dacă pui într-o cușcă doi iepuri cu doi lupi, doi și cu doi fac numai doi sau

cel mult trei, dacă lupii sînt cumva prea sătui. Tot așa dacă amesteci doi litri de alcool cu doi litri de apă nu obții patru litri de rachiu, ci mai puțin. Vezi dar că trebuie să fii precis în afirmațiile pe care le faci, căci altfel sîntem înstrăinați de problema pe care ne-o punem!

— Și fără de această precizare rămînea valabil ceea ce voiam să observ. Teorema lui Pitagora, despre care mi-ai spus că era cunoscută de egipteni și babilonieni cu mult înainte de a se naște Pitagora, nu va rămîne în forma în care o știm noi și peste milioane de ani de-acum înainte?

Prietenul meu a tăcut. Vorbind, nu băgasem de seamă cîtă măreție și prospețime era în pădurea pe care o traversam. De abia acum, cînd am continuat drumul, fără să ne mai spunem ceva, pe nesimțite adînca ei liniște a pătruns în mine, ca o fericire. Am înțeles de ce prietenul meu n-avea chef de vorbă și i-am dat dreptate. Tîrziu, după ce am ieșit la cîmp și a văzut că drumul prin soare mă obosea, mi-a spus :

— După ce urcăm dealul, dăm iar de pădure, dar dacă vrei, o putem lua pe drumușorul acesta, ca să facem un popas acolo sus, unde vezi brazii cei rari.

Am acceptat bucuros propunerea și în curînd eram pe dîmb.

— Cred că nici în rai n-ar putea fi mai bine, am observat eu. Între brazii de aici sîntem ca într-o căsuță cu cerul drept acoperiș. Uite fragi și afine! Mîncăm aici și tragem un pui de somn. Avem un covor de mușchi pe care ne putem întinde mai strașnic decît într-un pat. Tomnatecul este așa de departe ; la nevoie putem amîna urcușul pe mîine sau poimîine și să rămînem aici, nu vrei?

— Covrigaru-i covrigar, și pace! Ce înțelege el alta din excursie decît să mănînce bine, lăsînd ca amintire hîrtiile și cojile de ouă împrăștiate în toate părțile, să exclame mereu : vai! ce apă limpede, ce munte înalt, ce vedere strașnică... și să doarmă la umbră!

— Ei da, l-am înfruntat, n-am nici rezistența ta și nici sensibilitatea care au șlefuit-o în tine, din copilărie, dealurile și pădurile cu tăcerile, iar pîraiele cu șușotitul. Priveliștea care se deschide de pe un vîrf de munte este pentru tine o necesitate sufletească, pe cînd pentru mine, un ideal a cărui realizare o pot amîna, dacă efortul e prea mare. Tu cauți un orizont larg deschis, pe mine mă satisface și fundul acesta de căldare, cum spui tu. Priveliștea de aici e pentru mine încîntătoare, iarba, pădurea și munții, îi simt aproape, iar

eu sînt aici, lîngă ei. Săptămîna trecută, cînd ai reuşit să mă urci pe Rarău, munţii mi-au apărut îndepărtaţi şi estompaţi. Frumuseţea de pe Rarău era înfricoşătoare şi depăşea puterea mea de a o suporta. Mă temeam, nu ştiu de ce, dar teama s-a amestecat tot timpul cu sentimentele mele de admiraţie şi adoraţie ce-mi tăiau răsuflarea. Mai ales în dimineaţa aceea cînd ne-a înconjurat ceaţa din toate părţile şi pierdusem siguranţa pămîntului solid de sub picioarele mele, ştii cît eram de înspăimîntat?...

— Ştiu, ştiu, a rîs prietenul meu, am ghicit după graba cu care mi-ai apucat mîna. Parcă erai un copil...

— Chiar eram, fiindcă trăiam pentru prima oară asemenea clipe.

— N-am dreptate cînd te fac covrigar?

— Ba ai. De aceea nici nu te contrazic, numai că aş dori să mă înţelegi.

— Ei, asta nu! Eşti prea bătrîn, dragul meu, ca să te mai alinţi, a rîs el, întinzîndu-se pe spate, în timp ce eu mă sileam să aşez mîncarea pe iarbă.

Cînd m-am trezit din somnul care cred că ne-a cuprins pe amîndoi, eram un om fericit. Priveam cerul şi prin minte îmi alergau versuri. Aşa că, atunci cînd prietenul meu m-a întrebat: „cum stai cu înstrăinarea, bădie?" am răspuns nedumerit: „care înstrăinare?"

— Ei asta-i! Înstrăinarea, alienarea sau însingurarea de care nu te mai puteam desprinde în zori la pîrîu! Problema aceea a înstrăinării despre care un matematician habar nu are, fiindcă în matematică teorema lui Pitagora a rămas şi va rămîne aceeaşi pînă la sfîrşitul veacurilor.

Atunci mi-am adus aminte.

— Drept să-ţi spun, am răspuns, mi se pare că de atunci de cînd am vorbit despre acestea au trecut ani. Străbătînd pădurea am atins culmea liniştii, iar aici am aflat raiul; lasă-mă aşa, că nu vreau să mă întorc pe pămînt.

— Ia-o mai încet, dragul meu. Socot că eşti cel mult în purgatoriu, căci păcatele tale cele multe şi grele nu te-au lăsat să urci pînă la rai, care-i acolo sus, pe coama Tomnatecului... Acolo da, nu ţi-aş fi tulburat tăcerea...

— Dar eu am găsit-o şi aici. Uite, mărturie mi-s versurile lui Blaga, de care nu mă pot desprinde:

„Doinind aş privi şapte ani
Spre cerul cu miei luzitani

De nu m-ar găsi unde sînt
Neliniştea morii de vînt..."

— Va să zică, ţinînd seama de versurile care urmează, am ajuns să fiu eu astrul „văzut nevăzut din albastru" care ţi-a supt fericirea liniştii? Bravo, bădie! Sus m-ai mai ridicat!

— Să ştii că nu mă impresionează! Vreau să privesc mai departe „mieii luzitani", Dar dacă ai gust de vorbă, vorbeşte şi te voi asculta.

— Am să o fac, fiindcă m-ai atacat azi-dimineaţă cu atîta vehemenţă şi aşa de fără temei, încît e necesară o lămurire, ca să-ţi arăt că te-ai cam pripit făcînd acele afirmaţii. M-am gîndit la un caz autentic de înstrăinare, pe care-l cunosc din istoria matematicilor ascuns sub un titlu cu parfum romantic : „Problema florentină". Faptul s-a petrecut pe la sfîrşitul veacului al XVII-lea. Asta dovedeşte că sentimentul înstrăinării nu-l apasă numai pe omul modern, ci că a existat şi în trecut. Puţini mai cunosc azi tragedia sufletească a acelui matematician. În cursurile actuale de analiză matematică, amintirea ei s-a transformat într-o „aplicaţie" numită *problema lui Viviani*. Este vorba de calcularea ariei unei porţiuni din suprafaţa unei sfere tăiată de un cilindru circular drept, tangent în interiorul ei.

— Dragă Toa, de data aceasta să ştii că nu-ţi mai merge! m-am repezit eu. Nu fiindcă mi-ai distrus liniştea pe care-o atinsesem. Nu, ci fiindcă văd că ai de gînd să foloseşti un şiretlic ca să aduci vorba despre o chestiune de matematică! Aşa ceva nu înghit! Nu te-am ascultat eu cu plăcere ori de cîte ori mi-ai povestit cîte ceva din istoria matematicilor? De unde dar acest procedeu infam? Eşti în stare să pui într-o oală problema înstrăinării omului şi problema calculării unei arii, numai pentru simplul motiv că această problemă s-a numit cîndva florentină? Asta-i curată panglicărie şi nu o admit, oricît de covrigar oi fi eu. Nu spun că problema ta nu m-ar interesa! Mai ales fiindcă ea îmi aminteşte de zilele copilăriei, cînd mă punea mama să-i scot sîmburii din caisele necoapte, ca să facă dulceaţă. Găuream caisa de la un capăt la altul cu un tub de tablă, sîmburele intra în tub şi pe suprafaţa caisei rămîneau două găuri sau uneori numai una, cînd tubul aluneca prea aproape de coaja caisei. Desigur, caisa nu avea formă sferică, dar dacă s-ar repeta experienţa şi s-ar găuri un măr chiar pe lîngă coajă, cred că pe suprafaţa mărului ar apărea o curbă ce ar semăna cu cifra 8, un 8 aşe-



Vincenzo Viviani

zat pe sferă, punctul de încrucişare fiind acela în care tubul cilindric atinge mărul.

— Foarte bine vezi problema. Curba de intersecţie seamănă cu un 8 răsucit!

— Pe 8 n-ai decît să-l răsuceşti cît pofteşti, dar să nu mă faci să cred că poţi să-l răsuceşti ca pe o rufă udă şi să storci din el problema înstrăinării unui matematician, am continuat eu pe acelaşi ton.

— Prietenul meu a început să rîdă, cu hohote, apoi mi-a spus :

— Pe 8 n-am să-l răsucesc decît atît cît trebuie ca să stea lipit de sferă. Dar dacă vei avea răbdare, atunci vei afla cum a ajuns Vincenzo Viviani, un mare geometru florentin din veacul al XVII-lea, să constate, formulînd această problemă că el s-a înstrăinat de ştiinţa pe care o adora şi o credea cea mai apropiată de sufletul lui.

— Dacă-i aşa, să ştii că nu mai spun nimic. Am pus punct şi te ascult.

— Numai să nu fie „punct şi de la capăt", a ripostat prietenul meu, aprinzîndu-şi ţigara şi întinzîndu-mi-o să o aprind şi pe a mea, înainte de a începe povestea.

În 1622, cînd s-a născut Viviani, Descartes avea 28 de ani, iar Fermat 20. Nici unul dintre ei nu publicase încă vreuna dintre lucrările ce aveau să schimbe orientarea cercetărilor matematice. Numai Galilei, atunci de vreo 58 de ani, stîrnea furtuna în jurul lui. E drept că nu tipărise încă

acele vestite *Dialoguri asupra celor două sisteme mari ale lumii*, care-l vor conduce la închisoare și la abjurarea operei sale—arsă la Roma—, aceasta se va întîmpla mai tîrziu, dar și pînă atunci făcuse destule! De vreo zece ani, de cînd construise luneta și avusese ideea să o îndrepte spre cer, oamenii știau că *există pete în Soare, că Soarele nu-i fix, ci se rotește în jurul axei sale, că Jupiter are sateliți și că Pămîntul, ca și Jupiter, este tot o planetă*. Nici chiar misterioasele și temutele comete n-au fost cruțate; au devenit și ele obiect de rece cercetare științifică. După cum vezi, se frămîntau idei noi și se plămădeau concepțiile care le vor dărîma pe acelea ale scolasticii și ale inchiziției.

De tînăr, Viviani a arătat o mare pasiune pentru studii. La 16 ani a aflat, de la un profesor de-al lui, că nu există altă logică mai bună decît geometria, și astfel s-a trezit în el curiozitatea de a cunoaște.

— Cine nu știe cum era organizat învățămîntul în veacul al XVII-lea s-ar putea întreba ce a putut învăța el pînă la 16 ani, dacă nici nu auzise de geometrie?

— Cel ce nu știe ar putea-o crede, dar tu știi prea bine că atunci învățămîntul avea un caracter scolastic, adică, pe lîngă limba și literatura latină, se studia numai teologia, logica și filozofia lui Aristotel. Geometria se învăța doar în unele școli sau universități laice, cu tendințe de emancipare. Singurul geometru din toată Toscana, Clemente Settini, ținea la Florența un curs particular de matematică. Pe acesta l-a urmat Viviani.

— Bine, dar dacă sîntem în 1638, la această dată mai trăia și Galilei; or, și el era geometru.

— Da, Galileo trăia, dar după proces. Avea 75 de ani și locuia izolat de lume într-o vilă din Arcetri pe care o numea *închisoarea lui*; de fapt așa și era o dată ce îi erau controlate vizitele și drumurile ce ar fi vrut să le facă! Pe lîngă asta mai era și orb. Pierduse, după cum spunea el, *ochii care-i descoperiseră un cer nou*.

Vincenzo Viviani a urmat cursurile lui Clemente Settini cu atîta interes și înțelegere încît profesorul lui l-a recomandat la curtea marelui duce Leopold de Medicis, cunoscut pentru pasiunea sa față de matematici și de fizica cea nouă a lui Galileo. Astfel Vincenzo a fost invitat la curte și supus unui examen din materia care forma primele patru cărți ale *Elementelor* lui Euclid. Examinator era ducele însuși împreună cu alți curteni, tot oameni de știință. Viviani a

răspuns cu atîta ușurință la toate întrebările puse de examinator încît succesul lui a trezit îndoiala ducelui cu privire la talentul lui, susținînd că asemenea răspunsuri precise ar putea fi datorate unei foarte bune memorii. De aceea s-a hotărît ca Viviani să mai treacă o probă scrisă. Pentru tînărul îndrăgostit de geometrie problema propusă a fost un nou prilej de a-și dovedi vocația. Răspunsul lui a uluit și de data aceasta comisia. Marele duce i-a dat o bursă din care să-și procure cărți și a sfătuit pe tatăl lui Viviani să-l lase să continue studiile matematice.

— Bursa era necesară pe de o parte fiindcă pe atunci cărțile erau extraordinar de scumpe și, pe de altă parte, numai prin acordarea ei putea rămîne sub protecția marelui duce de Toscana.

— Într-adevăr, protecția ducelui îi asigura lui Viviani posibilitatea de a continua studiile. Examenul avusese loc la Livorno. Peste cîteva luni, cînd curtea a revenit la Pisa, marele duce de Toscana l-a vizitat pe Galileo în Arcetri și i-a recomandat pe Viviani. În urma acestei recomandații Viviani a obținut și permisiunea Inchiziției de a-l vizita pe Galileo. Galileo era o fire sociabilă. Îi plăcea să discute cu tinerii care puteau obține permisiunea de a-l vizita, să le propună probleme greu de rezolvat sau să rezolve el problemele pe care aceștia i le puneau. Pe Viviani, Galileo l-a îndrăgit de la început atît pentru firea lui modestă și plină de entuziasm cît și pentru perspicacitatea și bogăția cunoștințelor lui. După cum ți-am mai spus, Galileo orbise; la scris îl ajuta un elev al său, Dino Peri. Tocmai atunci acesta s-a îmbolnăvit destul de grav și a trebuit să plece. De aceea, curînd după ce l-a cunoscut pe Vincenzo Viviani, Galileo l-a primit în casa sa ca oaspete și elev. Numai să nu-ți închipui că în calitate de elev al lui Galileo modestia lui Viviani ajungea pînă la docilitate. Din contră.

— Ce vrei să spui ?

— Că Viviani nu pregeta să-și arate nedumerirea atunci cînd era necesar. Să-ți dau un exemplu care se cunoaște din scrisorile rămase de atunci. Vestitele *Dialoguri asupra științelor noi* au fost tipărite în Olanda, în 1638. Deși la Florența ele au ajuns abia peste un an, Viviani le-a cunoscut chiar din 1638 și le studia de atunci. Cred că nu trebuie să-ți mai spun cîtă vîlvă și cîtă admirație a stîrnit cartea lui Galilei, nici cu cîtă curiozitate și pasiune a fost citită de toți marii sa-

vanți din lume. Însă, dintre toți, numai acest băiețaș de 16 ani găsește în partea a treia a cărții o greșeală ! Anume, vorbind de mișcarea natural accelerată, Galilei afirma că viteza unui corp pe un plan înclinat nu depinde de înclinarea planului pe care cade. Viviani nu-i convins de aceasta și nu ezită să-i arate lui Galilei îndoiala sa. În cele din urmă maestrul dă dreptate elevului său și rectifică dialogul. Apoi, potrivit obiceiului, comunică faptul diferiților învățați și prieteni prin scrisori. Una dintre aceste scrisori era adresată, în 1639, lui Benedetto Castelli și, după cît îmi aduc aminte, avea următorul cuprins : „În filozofie îndoiala este mama invențiilor, căci ea croiește drumul către adevăratele descoperiri. Opoziția și observațiile pe care mi le-a făcut tînărul Viviani, oaspetele și discipolul meu, în legătură cu principiul admis de mine despre mișcarea accelerată pe care el a studiat-o cu multă pricepere, m-au obligat să meditez asupra lui pentru a mă convinge de adevăr și astfel am reușit, spre bucuria mea și a lui, să stabilesc o demonstrație pe care am comunicat-o și altora. El a făcut o redactare a ei pentru o nouă ediție a lucrării, fiindcă eu, complet lipsit de vedere, m-aș fi încurcat printre notațiile și paginile respective..."

— Și, în noua ediție, dialogul a fost modificat ?

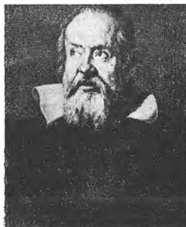
— Desigur, Dar această nouă ediție a apărut abia după moartea lui Galileo, îngrijită de Viviani.

— Știi ceva? Fiindcă mi-ai vorbit de Galileo, ce-ar fi să facem o paranteză și să discutăm piesa lui Berthold Brecht. *Viața lui Galileo?*

Ne întoarcem după aceea la Viviani. Tot a fost azi o zi de întoarceri și popasuri neprevăzute, unul în plus nu strică. Am văzut teatrul lui Brecht la tine în bibliotecă și sper că l-ai citit. Cum găsești această piesă?

— Mi-e greu să-ți spun. Un om de litere privește lucrurile ca totul altfel decît mine. Impresiile mele sînt pur personale și nu au nici o legătură cu incontestabilele calități ale piesei. Ele nu-s decît reacția stîrnită de unele fapte care nu concordă cu cunoștințele mele despre viața lui Galileo !

— Dar tocmai asta vreau să aud și eu, căci părerile specialiștilor le cunosc. Această piesă este, prin tema sa, excepțional de interesantă. Bertold Brecht a știut să trezească pe spectator din inerția de spectator, făcîndu-l să ia parte alături de *erou*, care nu mai este un *erou*, la frămîntările lui sufletești. De aceea s-au stîrnit atîtea discuții în jurul teatrului


Galileo Galilei

brechtian... Îţi aduci aminte, cred, de ultima convorbire dintre Galileo şi Andrea, cînd acesta îi spune elevului său : „Timp de cîţiva ani am fost la fel de tare ca stăpînitorii. Şi, cu toate acestea, le-am predat ştiinţa mea, lăsînd la voia lor să uzeze sau să nu uzeze de ea, ba chiar să abuzeze de ea după cum cereau interesele lor. Acum înţeleg că mi-am trădat menirea. Un om care face ce am făcut eu, nu mai are ce căuta în rîndul oamenilor de ştiinţă..." E zguduitoare această mărturisire şi nu-mi închipui vreun spectator care să rămînă indiferent cînd se dezlănţuie această furtună interioară.

— Ai dreptate şi regret că m-a impresionat prea puţin acest pasaj. Asta fiindcă eu îl cunosc altfel pe Galileo. Vezi, impresiile mele sînt acelea ale unui migălos cercetător de bibliotecă, care, din cauza detaliilor, nu se poate ridica la o privire de ansamblu. Ce să fac ? Mă sîcîie orice fapt care nu-i aşa cum l-am găsit eu printre hîrţoage. De aceea, Brecht, care şi-a pus problema unei documentări ştiinţifice şi se dovedeşte capabil de a o stabili, nu mă poate mulţumi cu jumătăţile lui de măsură ! Cînd se cunosc amănunte strălucitoare din viaţa lui Galileo, la ce bun să se inventeze altele mai palide ? De pildă, chiar în această fictivă întîlnire cu Andrea, întîi nu văd de ce nu s-ar fi precizat că ea a avut loc în *Arcetri, lîngă Florenţa,* localitate rămasă celebră tocmai prin faptul că în ea a locuit Galilei, în loc de acel vag *la ţară, în apropierea Florenţei*. Apoi, cînd Galileo îi spune unde se află copia

Dialogurilor asupra științelor noi, Andrea scoate copia din glob și exclamă plin de uimire și încîntare: — *Vestitele „Discorsi"* !

— Exact, perfect. Nici nu se poate mai natural; ce putea spune altceva Andrea? Ele erau vestite încă înainte de a se tipări. Nu mi-ai spus tu singur că Galileo răspîndise cartea aceasta, mai bine zis primele două părți — pe care Galileo le-a numit „zile" — primele două zile, în mai multe copii, ce circulau încă din 1636 printre prieteni? Sau nu știi oare că *Discorsi* se traduce în românește prin *Dialoguri*? Dacă ai fi căutat în dicționarul italian-român, ai fi aflat aceasta!

— Probabil. După cum vezi, obiecțiile mele nu au nici o noimă și le retrag.

— Ba nu, te cunosc eu prea bine! Nu cedezi tu așa de ușor! Explică-mi ce nu te-a satisfăcut?

— Află atunci că titlul *Discorsi*, sub care e cunoscută azi celebra lucrare a lui Galileo, nu corespunde cu adevăratul nume original al operei. Editorul Elsevier, care a tipărit lucrarea în Olanda, i-a pus acest titlu fără știrea și permisiunea lui Galileo. Există scrisoarea lui Galileo din 1638 adresată prietenului său din Paris, Elia Diodati, în care îl roagă să facă tot ce se poate ca să schimbe acest titlu. „Am rămas mirat și supărat de libertatea pe care și-a luat-o dl. Elsevier de a schimba titlul cărții mele", îi scria Galilei. Acum — știind aceasta — te rog să-ți imaginezi și tu ce impresie mi-a putut face mie exclamația lui Andrea! Ar fi fost de ajuns să-mi amintesc de mînioasa intervenție a lui Galileo cînd a aflat de acest titlu, lăsînd la o parte că faptul în sine s-a petrecut nu înainte de tipărire, ci un an după tipărirea cărții, ceea ce denotă că *Andrea nu avea de unde cunoaște acest titlu*!

— Da, la tine e o deformare profesională. Noroc că sînt prea puțini aceia ce pot sesiza asemenea amănunte, fără nici o importanță artistică!

— Sînt de părerea ta! Fiindcă tot am pornit pe panta aceasta, am să-ți mai semnalez încă vreo două-trei amănunte, la fel de fără importanță artistică, dar care m-au sîcîit. De pildă, trecerea manuscrisului peste graniță de către Andrea în 1637! Lucrurile s-au petrecut cu totul altfel, deși nu mai puțin romantic. Anume, în 1636, și nu 1637, una dintre copiile *Dialogurilor* a fost predată de Galileo contelui de Noailles, fost elev al său pe cînd era la Padova, căruia îi va și dedica această carte. Contele de Noailles, ambasador

al Franței la Roma din 1634, îl admira mult pe Galileo, și, profitînd de calitatea lui oficială, a încercat chiar să-l salveze în timpul procesului, însă nu a reușit. În 1636, cînd a părăsit Italia, a obținut o autorizație specială de la Papă ca să-l întîlnească pe Galileo. Întîlnirea a avut loc și, cu această ocazie, Galileo i-a înmînat un manuscris al *Dialogurilor* ca acesta să le publice. Ei convin, așa cum remarcă și Brecht, ca autorul să invoce scuza că tipărirea s-a făcut fără știrea lui. Aceasta a fost în 1636. Tot în 1636, Galileo tratează despre tipărirea cărții sale direct cu editorul Elsevier, care se afla la Veneția. Prin intermediul altui elev al său, Galileo îi trimite și lui o copie a lucrării, grăbindu-se chiar să termine și cuprinsul zilelor a treia și a patra, pentru ca manuscrisul să fie complet, fiindcă cel dat lui Noailles cuprindea numai primele două zile. Vezi ? Acestea s-au petrecut în 1636 și m-a supărat că Brecht le pune în 1637, cînd, la această dată, cartea era gata imprimată. Și încă ceva ! Cred că nu ar fi fost deloc greu pentru Brecht să fi respectat adevărul, cel puțin în ceea ce privește societatea lui Galileo din ultimii ani ai vieții lui. Se știe bine că în preajma lui se aflau atunci cei doi elevi despre care ți-am vorbit și, uneori, fiul lui Galileo, Vincenzio, dar nicidecum Virginia, care era la mănăstire. Scrisorile lui Galileo din acea vreme dovedesc precis că preocupările lui erau îndreptate numai și numai spre cercetări științifice. Singura sa dorință era să poată transmite cît mai multe cunoștințe : „Creierul meu neliniștit nu poate sta fără să macine încontinuu..." spunea el într-o scrisoare. În ianuarie 1633, cu cîteva zile înainte de a pleca la Roma ca să fie anchetat de Inchiziție— procesul s-a terminat în iunie — îi scria lui Elia Diodati : „În afară de alte neplăceri, mi-a căzut și cea mai mare, de a nu putea progresa în pregătirea celorlalte opere ale mele și, în particular, a aceleia despre mișcare, pentru a o publica cît timp sînt în viață". Vezi cum privea el faptul că trebuia să plece la Roma ? El bănuia că nu-i va fi de loc ușor acolo, dar nu se plîngea de asta, căci nu-l interesa. Nu aceasta era principal, ci faptul că *plecînd* nu va mai avea liniștea necesară ca să *progreseze în pregătirea celorlalte opere*. Galileo, pe care îl cunosc eu, a fost plin de energie și a dorit să lucreze pînă în ultima clipă ! Problema abjurării a privit-o, cred, cu aceiași ochi ca odinioară Aristotel. Aristotel a preferat să fugă din Atena, unii ar zice ca un laș. Dar el a făcut-o—și sînt sigur că așa a fost —fiindcă nu a vrut să apese

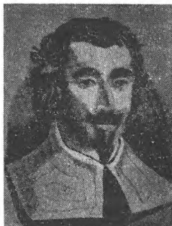
pe atenieni rușinea de a-l fi omorît și pe el, ca pe Socrate! Așa trebuie să-l fi văzut și Viviani pe Galileo. Nicicînd Galileo n-a înclinat capul în fața lui, socotindu-se *nedemn de a face parte din tagma oamenilor de știință* ! Tocmai această atitudine demnă și dîrză a lui Galileo a putut lega pe tînărul Vicenzo de uriașul orb din Arcetri, cu asemenea legături sufletești, încît în lunga viață pe care va trăi-o Viviani, titlul de „ultim elev al lui Galileo" avea să-i pară cel mai glorios dintre toate cîte le-a avut și nu se putea plînge că nu a avut destule alte titluri de glorie ! Ce plăcere mi-ar fi făcut să-l aud pe Galileo vorbind, îndată după abjurare, cu Thomas Hobbes, căci se știe că acesta l-a vizitat atunci, sau cu tînărul John Milton, care avea 30 de ani cînd a venit, în 1638, la Arcetri ca să-l întîlnească pe Galileo, sau cu filozoful francez Pierre Gassendi, care îi scria în 1632, după ce primise de la Galileo un exemplar din *Dialogul asupra celor două sisteme,* cam așa : „Vă rog, nu numai în numele meu, ci și al altora, să nu ne faceți să lîncezim în așteptarea rezultatelor despre corpurile care cad cu viteză neegală..." Pe *acest Galileo* îl cunosc și pe *acest Galileo* aș fi vrut să mi-l prezinte Brecht. Nu mă tem că, folosind aceste date, Galileo ar fi fost în pericol să se transforme în erou ! Putea *rămîne om* chiar dacă ar fi discutat cu acești savanți în loc să-i spună Virginiei cum să gătească cele două gîște primite de la un necunoscut ! Eu nu cred că vreun admirator s-ar fi încumetat să-i trimită lui Galileo *două gîște* ! Avea cu ce trăi, ba chiar avea posibilitatea să primească oaspeți în casa lui pe vreme îndelungată, așa cum știm că a fost cazul lui Viviani. Dar destulă vorbă ! Ți-am spus și eu niște amănunte care n-au nimic comun cu tema lui Brecht.

— Da. Brecht a făcut o mare greșeală că nu ți-a cerut să colaborezi cu el !

— Ți-a venit apa la moară, n-am ce spune !

— Și încă cum ! Din belșug ! De aceea, plin de generozitate, te rog să închidem paranteza și să revenim la Viviani !

— Nu-i nevoie s-o închidem, căci este gata închisă. Prin cele menționate am căutat să-ți arăt că Galileo a stîrnit *admirația*, și nu *mila* lui Viviani. Tînărul Viviani nu a văzut în fața lui pe altcineva decît pe marele om ce știa să citească cu *ochii lui cei orbi* tainele naturii pe care zadarnic le căuta Vincenzo cu ochii lui cei limpezi ! Vincenzo se silea să îndeplinească slujba de a înregistra, cît mai fidel, cele ce remarca Galileo. Numai o dată l-a silit și el pe Galileo să se


Evangelista Torricelli

întoarcă, ca să privească mai atent la una dintre acele taine pe lîngă care trecuse prea repede. Dar deşi bariera vîrstei dintre aceşti doi pasionaţi iubitori de ştiinţă fusese desfiinţată, Viviani înţelegea că ajutorul pe care el i-l putea da lui Galileo era prea mic. Galileo avea nevoie de un om format, căruia să-i schiţeze teoriile sale, iar acela să le desăvîrşească. Acest om a fost Evangelista Torricelli, cercetător plin de de calităţi şi el însuşi autor al unei lucrări despre mişcare, inspirată de descoperirile lui Galileo. I-a fost recomandat de către Benedetto Castelli. Evangelista Torricelli a venit în octombrie 1641 şi s-a stabilit a Arcetri. Deşi cu 14 ani mai mare decît Viviani, ei s-au împrietenit şi toţi trei au lucrat împreună.

Ei au început să studieze împreună Cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid şi să pregătească materialul pentru părţile intitulate „Ziua a cincea şi a şasea". Dar colaborarea a fost de scurtă durată, căci Galileo a murit în ianuarie 1642. Amintirea acelor clipe de lucru în comun va evoca-o Vincenzo Viviani în biografia lui Galileo, pe care a compus-o mai tîrziu. Din ea se ştie că uneori lua parte la aceste şedinţe şi fiul lui Galileo, Vincenzio, căruia Galileo i-a expus planul unui orologiu cu pendulă. Deşi Vincenzio Galilei era un talentat experimentator, el nu a reuşit să ducă pînă la capăt această invenţie. De altfel, el nu a mai trăit decît 7 ani după moartea tatălui său.

— Mi se pare că construcţia orologiului cu pendulă se datoreşte lui Huygens, nu?

— Exact.
— Şi ce a făcut Viviani după moartea lui Galileo ?
— După moartea lui Galileo, marele duce Ferdinand l-a invitat pe Torricelli să rămînă ca profesor de matematici şi totodată succesorul lui Galileo la Academia sa, iar pe Viviani l-a numit prim-matematician al curţii. Aşadar, ei au continuat să lucreze împreună. Pe de o parte, au redactat lucrarea lui Galileo şi, pe de altă parte, Viviani l-a ajutat pe Torricelli în toate experienţele lui de fizică. Printre altele a luat chiar parte, în anul următor, la descoperirea barometrului.
— Într-adevăr, îmi amintesc că Torricelli a descoperit barometrul. Văd că ai fixat o dată, 1643. Cum de o ţii minte ?
— Fiindcă are o poveste interesantă. Fîntînarii Marelui Duce din Florenţa căutau să construiască o pompă aspiratoare care să ridice apa la o înălţime mai mare decît 32 de picioare. Pe atunci nu se ştia care-i forţa ce urcă apa în corpul unei pompe şi o menţine acolo. Ei au construit pompa, dar apa nu s-a urcat mai sus, şi atunci au venit la Galileo să-l întrebe unde-i greşeala. Faptul că nu se urca mai sus de 32 de picioare era în contrazicere cu principiul admis pe atunci că „natura are oroare de vid". Galileo demonstrase că aerul este greu, dar nu s-a gîndit să folosească acest fapt ca să explice insuccesul grădinarilor. Se spune că, nedumerit, le-ar fi răspuns foarte vag că „natura nu are oroare de vid decît numai pînă la înălţimea de 32 de picioare". Preocupat de această problemă, Galileo a încredinţat-o lui Torricelli. Acesta a găsit răspunsul abia la un an după moartea maestrului, bazîndu-se tocmai pe descoperirea lui Galileo, că nivelul atins de apă în pompa aspiratoare este echilibrat de către greutatea masei de aer care apasă pe suprafaţa exterioară. Discutînd problema aceasta cu Viviani, s-au hotărît amîndoi să repete experienţa, cu condiţia ca să folosească mercur în loc de apă. Aceasta deoarece mercurul, fiind de 14 ori mai greu ca apa se va ridica la o înălţime de 14 ori mai mică. Viviani a construit un tub lung de trei picioare, închis la un capăt, şi a procurat mercurul. Cînd totul a fost gata, ei au umplut tubul cu mercur şi apoi, ţinîndu-l bine astupat cu degetul, l-au cufundat într-o cuvă cu mercur. Şi, într-adevăr, mercurul din tub a coborît pînă la distanţa prevăzută de ei. Tot Viviani a purtat apoi tubul cu mercur la diferite înălţimi şi prin aceasta au stabilit un mijloc de măsurare a presiunii atmosferice, adică au construit barometrul.

Însă nici prietenia lui Viviani cu Torricelli nu avea să dureze prea mult, fiindcă acesta a murit în 1647. O dată cu el a murit și libertatea lui Viviani, căci cele mai multe dintre sarcinile pe care le îndeplinea Torricelli i-au fost încredințate lui. Avea atunci 25 de ani, o cultură matematică serioasă și o dragoste nemărginită pentru munca științifică. De aceea, peste doi ani, devenind vacant postul de profesor de matematici pentru pajii marelui duce, a fost însărcinat și cu predarea acestui curs, deși tot Viviani se ocupa de instrucția științifică a tînărului principe moștenitor. Îți spun aceste amănunte fiindcă din ele se va dezvolta, treptat-treptat, tragedia înstrăinării. Despre ea nu-i timpul să-ți vorbesc, în fața noastră este încă un Viviani tînăr — acum are 28 de ani — , iar povestea aceea se va dezlănțui fulgerător, cînd va avea 70 de ani !

— Cred că noi doi nu ne înțelegem asupra termenilor folosiți în discuție ! Cum s-ar putea înstrăina de matematici cineva care lucrează mereu în acest domeniu ? După cîte îmi spui, văd că Viviani nu era numai un matematician, ci și un experimentator dibaci și oricîte sarcini i s-ar fi încredințat, ele făceau parte din domeniul preocupărilor lui. Îți spun drept că nu mai înțeleg nimic !

— Bine, Ai răbdare și toate se vor lămuri. Reține că pe lîngă multiplele lui ocupații, Viviani ajuta pe Marele duce să pună și bazele Academiei Florentine de Științe. Academia înființată în 1651 s-a numit „Accademia del Cimento", adică Academia de Fizică Experimentală, acesta fiind înțelesul cuvîntului *cimento*. Viviani, numit primul academician, avea datoria să propună și să conducă executarea multor experiențe de optică sau de acustică și să construiască lunete astronomice. Cînd a împlinit 30 de ani a fost numit și primul inginer al ducelui. În această calitate, avea sarcina să stabilească, împreună cu Domenico Cassini, alt renumit matematician și astronom propus de Papă, planurile de reglare ale cursului rîului Tibru, care provoca mari pagube prin inundații. Întîlnirea cu Cassini i-a prilejuit legarea unei noi prietenii, și au petrecut împreună multe seri făcînd observații astronomice. Documentele rămase de atunci arată că Viviani a stabilit, în 1665, efemeridele sateliților lui Jupiter, și a observat cometa care s-a ivit în acel an. Au rămas și alte observații de ale lui, de mai tîrziu, asupra unei eclipse de lună, făcute cînd trecuse de 50 de ani. Abia din 1666 a fost

eliberat de unele dintre multiplele lui ocupații ca să i se lase timp și pentru *lucrările de geometrie* începute încă de pe cînd era elevul lui Galileo.

— Cred că obligațiile de la curtea ducelui Ferdinand îi răpeau tot timpul liber! Mă mir că mai găsea vreme să se gîndească la lucrări de geometrie și că Marele duce s-a hotărît să-i facă această concesie!

— Și povestea asta are cîntecul ei, pe care-l vei afla la timp. Deocamdată țin să-ți precizez că, dacă nu ar fi existat primii 8 ani de intensă viață științifică, cred că Viviani ar fi fost curînd înecat de aceste multiple obligații și etichete de curte. Însă în cei trei ani petrecuți sub conducerea lui Galileo și în ceilalți cinci, alături de Torricelli, el a avut răgazul să-și contureze unele probleme de geometrie pe care dorea să le rezolve. El însuși scria în autobiografie că a studiat conicele pe cînd avea 22 de ani și că acei ani au fost singurii pe care i-a folosit în voie, pentru cercetare și ghicire...

— Cum pentru ghicire?

— Ajungem și acolo! Oricum, află că nu-i vorba de ghicit în palmă și nici în cafea! Cred că ți-am spus cîndva că, alături de Arhimede, Apolloniu a fost cel mai profund geometru al antichității. Opera lui principală, studiul conicelor, cuprindea 8 cărți. În Europa occidentală, lucrarea a fost cunoscută deabia pe la mijlocul veacului al XV-lea, prin matematicianul german Regiomontanus. Acesta a venit în Italia, invitat de Papă, ca să reformeze calendarul și a găsit în biblioteca Vaticanului un manuscris cuprinzînd o traducere în limba arabă a primelor patru cărți ale lui Apolloniu. El le-a tradus în latinește pentru a le tipări, dar, fiind omorît, traducerea nu a mai fost publicată. Abia peste vreo 80 de ani a apărut o altă traducere în latinește, a primelor patru cărți ale lui Apolloniu. Nefiind clară, peste alți 30 de ani, Commandino a compus un alt text mai precis, dar tot numai al primelor patru cărți, acelea în care se tratează partea elementară a teoriei conicelor. Despre cartea a cincea, considerată pierdută, se știa dintr-o scrisoare a lui Apolloniu către Eudem, că ar cuprinde „teoria maximelor și a minimelor", cu alte cuvinte metoda de a duce tangenta la o conică.

— Nu înțeleg. Ce are de-a face maximul și minimul cu tangenta la conică?

— Are, fiindcă pentru a duce tangenta într-un punct al unei conice, Apolloniu construia normala în punctul respectiv al curbei și pe ea ducea perpendiculara. Obținută,

astfel, el considera normala ca fiind un segment, de lungime maximă sau minimă, dusă dintr-un punct exterior curbei, la un punct de pe curbă. Bineînțeles că nici Viviani nu putea ști mai mult despre cartea a cincea, fiindcă nu citise decît tot primele 4 cărți ale lui Apolloniu, singurele cunoscute atunci. Avea 18 ani și ce-i trece prin cap? Cu îndrăzneala pe care i-o putea da numai entuziasmul tinereții, își propune să ghicească cuprinsul cărții a cincea a lui Apolloniu! Mărturisind intenția sa lui Galileo—și Galileo era în măsură să cunoască profunzimea cunoștințelor de geometrie greacă ale elevului său, acesta l-a încurajat.

— De îndrăzneala tînărului Vincenzo nu mă mir, dar de aprobarea lui Galileo, da! Cum putea să admită el ca Viviani să încerce reconstruirea operei unui așa de subtil gînditor, bazîndu-se numai pe o vagă indicație a cuprinsului?

— Nu găsesc că ar fi putut exista un alt mijloc de a-i arăta încrederea sa, decît îndemîndu-l să o facă. De altfel, erau la modă pe atunci încercările de reconstituire ale operelor clasice pierdute. Încercaseră mai înainte — deși fără succes — și alți adînci cunoscători ai geometriei grecești, ca Marino Ghetaldi sau Francesco Maurolico, și vor continua după el și alți îndrăgostiți de geometrie, printre care chiar Pierre Fermat! E drept că Viviani mai avea și un oarecare ghid—foarte vag de altfel — în comenturiile lui Pappus : *Collectiones*, adică *Culegeri*, traduse în latinește de Commandino pe la sfîrșitul veacului al XVI-lea. În cartea a VII-a a *Culegerii*, unde sînt menționate lucrările care constituiau „tezaurul analizei" cum spunea Pappus, adică operele lui *Aristeu*, *Euclid* și *Apolloniu* despre secțiunile conice, existau unele indicații despre materia tratată în această operă. Or, Viviani avea impresia că se indentificase cu modul de gîndire grec și, oarecum, chiar cu procesul de creație. Multe dintre teoremele aflate în cele patru cărți ale lui Apolloniu le prevăzuse mai înainte de a le fi cunoscut din text. Aceste lucruri le știa Galileo și de aceea l-a și încurajat. Viviani a lucrat cu sîrg vreo doi ani la această Carte a V-a, dar după moartea lui Galileo nu a putut continua... Anul 1642 distrugea nu numai liniștea lui sufletească, ci și condițiile lui de lucru. Intrînd în seviciul Marelui Duce de Toscana, i se impuneau sarcini care-i cereau timp și încordare intelectuală.

Teoremele lui Apolloniu au rămas pentru el un refugiu după zile grele de muncă și despre aceste cercetări știau numai

vreo trei prieteni cărora le comunica, din cînd în cînd, rezultatele obținute. Printre aceștia era și Carlo Dati, alt elev de-al lui Galileo. Or, aceste rezultate ar fi continuat să rămînă multă vreme prilej de recreare și delectare intimă, dacă o întîmplare neprevăzută nu ar fi accelerat publicarea lor. S-a întîmplat anume ca prin iunie 1658, adică cu 8 ani mai înainte de a începe „cîntecul", Alfons Borelli, pe atunci profesor de matematici la Pisa, să treacă prin Florența în drum spre Roma. Oprindu-se aici și cercetînd biblioteca Marelui Duce, el a găsit un manuscris arab cu o însemnare în limba italiană: *Opt cărți despre conice ale lui Apolloniu din Perga.* Borelli nu cunoștea limba arabă, dar această însemnare i-a arătat că făcuse o descoperire senzațională, căci, după cum ți-am spus, pe atunci nu se cunoșteau decît primele patru cărți ale lui Apolloniu. Faptul l-a impresionat nespus, fiind o fire stăpînită de pasiune, așa că a mai rămas cîteva zile la Florența ca să cerceteze manuscrisul. Mai întîi, comparînd figurile din manuscris cu acelea care se aflau în traducerea primelor patru cărți, făcută de Commandino, a constatat asemănarea lor. Apoi, cu ajutorul unui călugăr care avea cunoștințe de limbă arabă, a văzut că în *Cartea a V-a* sînt probleme de maxim și minim, așa cum se știa că trebuie să fie din scrisoarea către Eudem și din comentariile lui Pappus. Încredințat că manuscrisul aflat cuprindea într-adevăr mai mult decît cele 4 cărți ce se cunoșteau pînă atunci din conicele lui Apolloniu, a cerut marelui Duce permisiunea de a-l traduce. Ducele i-a încredințat manuscrisul ca să-l ducă la Roma, unde se afla un savant orientalist cu ajutorul căruia urma să facă traducerea. Viviani nu știa nimic despre aceasta, căci tocmai în acea săptămînă în care s-au petrecut evenimentele el era plecat din oraș și s-a reîntors exact în ziua cînd Borelli ducea la Roma manuscrisul lui Apolloniu.

— Îmi închipui ce emoție trebuie să fi avut Viviani cînd a aflat despre cele întîmplate!

— Da, dar nu numai el, ci și prietenii lui, care, deși știau aceasta, nu aveau cum să-l înștiințeze și nici nu puteau interveni, fără consimțămîntul lui! Prietenii regretau că el nu și-a publicat lucrarea mai înainte, ca astfel să se poată stabili dacă a mers pe drumul cel bun sau nu. De-abia după întoarcerea lui Viviani, Carlo Dati, a arătat situația Marelui Duce. Acesta l-a chemat pe Viviani și l-a îndemnat să publice lucrarea. Ca să elimine orice suspiciune asupra vreunei legături dintre reconstituirea lui și opera lui Apolloniu, în tim-

pul traducerii ei din limba arabă — aceasta a rugat pe principele Leopold să sigileze manuscrisul lui. Ajuns la Roma, Borelli a început traducerea și, pe la sfîrșitul lunii, Viviani a primit o scrisoare de la el prin care îl anunța, încîntat, că opera e mai frumoasă decît și-a putut-o imagina.

— Dacă Borelli i-a scris lui Viviani, înseamnă că și el știa de lucrarea lui?

— S-ar fi putut să nu afle, fiind în Florența? Înclinat spre intrigi și neștiind ce s-a întîmplat după plecarea lui la Roma, este evident că scrisoarea a fost trimisă întîi ca să-l amărască pe Viviani și apoi ca să afle vești noi. Viviani i-a răspuns chiar în ziua următoare, arătîndu-i că s-a decis să-și publice lucrarea sa de reconstituire a *Cărții a V-a* și l-a rugat să nu-i comunice nici un fel de amănunte relativ la cele ce a găsit în cartea lui Apolloniu. Borelli i-a răspuns, arătînd că e de acord cu el și atestînd totodată că Viviani nu are cunoștință de nici o propoziție din cartea pe care o traducea el atunci. Pe la sfîrșitul lui octombrie, Borelli s-a întors de la Roma cu traducerea gata făcută. Marele Duce a hotărît, în prezența principelui Leopold și a lui Viviani, ca nimeni să nu afle nimic din conținutul traducerii pînă ce nu se va publica lucrarea lui Viviani. Totodată, Viviani ruga să se constituie o comisie sub conducerea principelui Leopold, în care să se citească comparativ cele două lucrări și să se judece dacă ghicirea a reușit sau nu. Lucrarea lui Viviani, împărțită în două părți, a fost dată la tipar la sfîrșitul anului 1658 și a apărut în anul 1659, iar traducerea făcută de Borelli abia peste doi ani, în 1661.

— De ce a întîrziat atîta Borelli cu publicarea traducerii?

— Aceasta nu a depins de Borelli, ci de Marele Duce. El era acela care a decis tipărirea, căci el a suportat cheltuielile ambelor lucrării. De altfel, prin pana lui ascuțită, Borelli și-a vărsat veninul, natural nu asupra ducelui, ci asupra *prealuminatului filozof și matematician Vincenzo Viviani din Florența*, din cauza căruia, afirma el în prefață, această traducere a întîrziat să apară!

— Și care a fost rezultatul confruntării?

— Lucrarea a însemnat un succes extraordinar pentru Viviani. Toți matematicienii au fost de acord să-l proclame printre cei mai valoroși geometri de atunci. În elogiul pe care l-a făcut președintele Academiei Franceze, Fontenelle, la moartea lui Viviani, căci trebuie să știi că Viviani a fost din 1699 unul dintre cei 8 membri străini ai Academiei din Paris,

amintind de această lucrare, spunea că cel dispărut din viață a făcut mai mult decît să ghicească conținutul *Cărții a V-a*, fiindcă a dus problemele mult mai departe decît le dusese Apolloniu.

La fel și Montucla, în binecunoscuta lui operă *Istoria matematicilor*, scria că paralela care s-a făcut între lucrarea lui Viviani și a lui Apolloniu nu i-a fost dezavantajoasă, adăugînd că : în problemele care le tratează la fel cu Apolloniu este la fel de profund ca și geometrul antic, dar că, atacînd un cîmp mai larg decît Apolloniu, Viviani găsește proprietăți noi ale conicelor și prin aceasta lucrarea poate fi considerată ca un supliment la vechea teorie a curbelor. În același timp, Montucla observa că Viviani nu a atins chestiunile cele mai grele pe care le-a tratat Apolloniu în *Cartea a V-a*, ca, de exemplu, determinarea punctelor de unde nu-i posibil să se deducă decît o singură perpendiculară.

Gino Loria considera și el că reconstituirea *Cărții a V-a* rămîne demnă de celebritate, adăugind : „Reconstituirea lui Viviani conține mai mult și mai puțin decît opera lui Apolloniu : mai mult prin vastitatea cîmpului de cercetare, mai puțin prin profunzimea investigațiilor". Ți-am arătat cîteva dintre părerile cu greutate, ca să te încredințez astfel de valoarea și de meritul acestor cercetări.

— Acum recunosc că Galileo a avut dreptate! Dacă Viviani s-a născut în 1622, în 1658 avea 36 de ani. Probabil că tot de aceeași vîrstă a fost și Apolloniu cînd a compus cartea sa! La vîrsta aceasta și cu talentul lui excepțional, Viviani a putut intui ceea ce și un alt talent excepțional intuise mai înainte, chiar dacă între aceste două opere s-au interpus două mii de ani

— Numai că Vincenzo Viviani s-a apucat de treaba asta pe cînd avea 18 ani. La această vîrstă, ca să te încumeți să faci așa ceva, mi se pare că trebuie să ai, pe lîngă curaj, și o doză bună de entuziam considerat adesea naivitate! Dar lumea este a celor curajoși și entuziaști. Cei ce și-au spus că-i imposibil să atingi geniul lui Apolloniu, că, oricît de profund ai cunoaște geometria și metodele de cercetare ale geometrilor greci, numai întîmplarea poate face să privești problema exact din același punct de vedere ca și Apolloniu, nu au realizat nimic. După cîte vezi, pun accentul pe *întîmplare*, fiindcă Viviani nu cunoștea *decît foarte vag care sînt datele și cererile din problemă* ; ca dovadă ai observațiile lui Montucla și Gino Loria. Însă acest tînăr impetuos nu urmărea gloria lui personală, el era stăpînit numai de curiozitatea științifică, de

setea și bucuria de a descoperi acele adevăruri geometrice pe care le-ar fi putut îndrăgi Apolloniu. E aceeași patimă care-l îndeamnă și pe un colecționar de tablouri să adune tablouri celebre sau pe un avar, banii. Pe el îl pasionau într-atît aceste teoreme de geometrie și se integrase în înlănțuirile lor logice cu atîta intensitate, încît, bănuiesc, nu s-a gîndit nici o clipă măcar la îndrăzneala de a se compara, el un tînăr de 18 ani, cu titanul Apolloniu ajuns la maturitate! A dorit și s-a hotărît să reconstituie *Cartea a V-a* cu aceeași impetuozitate cu care îi arătase cu un an mai înainte lui Galileo *că nu-i de acord* cu faimoasa propoziție din „Ziua a treia"!

— Mi se pare că pe atunci geometria forma obiectul de predilecție al celor ce îndrăgeau matematicile și orice urme care conduceau la rezultatele stabilite de cei antici erau cercetate cu pasiune și nerăbdare. Am putut să observ aceasta din istoria cu Borelli.

— Desigur. În special prin subtilitatea problemelor puse și a soluțiilor indicate, operele lui Arhimede și Apolloniu cuceriseră admirația unanimă. Așa se explică interesul și succesul pe care l-a avut cartea lui Viviani. Uite, mi-am amintit acum și de un raport confidențial făcut de un călugăr specialist către superiorul său, în care acesta scria cam așa despre lucrarea lui Viviani : opera trebuie prețuită pentru greutatea și frumusețea materiei tratate. Ni s-a spus despre el că are un deosebit talent geometric în inventarea teoremelor și îmi pare că aceasta se poate spune și despre cartea lui.

— Așadar, în urma acestui succes, Marele Duce a hotărît să-i dea oarecare răgaz lui Viviani. Dar nu mi-ai spus, cum s-a chemat această carte?

— Într-adevăr, așa-i. Ea a fost intitulată *De maximis et minimis geometrica divinatio in quitum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum* și a apărut după cum ți-am spus, la Florența, în 1659. Pe vremea aceea, Viviani era încă prins într-o mulțime de lucrări de urbanistică și avea puțină vreme pentru matematici. Îți aduci aminte că lucra împreună cu Cassini la reglarea fluviului Tibru și, în același timp, făcea observații astronomice legate, după cum știi, de calcule migăloase ; mai avea de ținut și cursuri și să se ocupe de educația științifică a principelui moștenitor.

— Da. Ocupații care îi răpeau timpul pe care altul l-ar fi închinat geometriei!

— Nu-i de mirare deci că 15 ani nu a mai publicat nimic. În volumul ce apărea după acest răstimp se găsesc grupate la un

loc două lucrări care nu aveau nici o legătură între ele. Una era o nouă traducere a *Cărții a V-a* din *Elementele* lui Euclid, iar cealaltă se chema *Recreații geometrice*.

— Mi-ai spus că și Galileo făcuse unele observații în legătură cu teoremele din *Cartea a V-a* lui Euclid, pe care le-a lucrat împreună cu Torricelli. Ele aveau să formeze subiectul zilei a cincea din *Dialoguri*. Probabil că Viviani a folosit această lucrare a lui Galileo?

— Desigur. Acesta era și motivul pentru care publica traducerea. În prefață, el dezvăluie amănunte prețioase relativ la viața și opera lui Galileo. Traducerea era intitulată așa : *A cincea carte din Elementele lui Euclid sau știința universală a proporțiilor, explicată cu ajutorul părerilor științei lui Galileo*, urmată de *Începutul celei de-a cincea zi*, pe care Galileo intenționa să o adauge celor patru tipărite în *Două noi științe despre Mecanică și Mișcarea locală*.

— Cum ai spus? Unde intenționa Galileo să adauge ziua a cincea?

— La *Două noi științe despre Mecanică și Mișcarea locală*.

— Știi că am făcut o descoperire?

— Vai de mine! Tocmai acum sîntem în mijlocul pădurii și nu avem cum să o anunțăm! Hai degrabă acasă, ca să o poți comunica!

— Lasă gluma, îți vorbesc serios! Am descoperit cum a intitulat Galileo cartea pe care editorul olandez a numit-o *Dialoguri* și despre care spuneai că azi nu i se mai cunoaște adevăratul titlu. Uite, o spune clar Viviani: *Două noi științe*... Sînt sigur că așa a numit-o Galilei, căci Viviani știa foarte bine. Cînd a citat-o, nu a transcris titlul cărții, ci a amintit-o, așa cum era el obișnuit să o numească, sau să-l audă pe Galileo numind-o!

— Prea bine! S-ar putea să fie așa, dar ca să o dovedești ar trebui să mai faci cîteva cercetări suplimentare. Nu te-ar tenta un drum la Florența?

— O, desigur ! Dar deocamdată nu dau vrabia din mînă pe cioara din par, așa că prefer să mai zăbovim aici vreun ceas-două, pînă la apusul soarelui. Și *Recreațiile geometrice* ce cuprind ?

— *Recreațiile geometrice* cuprind soluțiile la mai multe probleme care au fost propuse în anul 1675 de către un geometru din Leyda. Dorind să rămînă necunoscut, a publicat problemele prin intermediul altui prieten, cerînd matematicienilor italieni și germani să le rezolve. Răspunsuri parțiale au fost

date de mai mulți matematicieni. Unul dintre ei a remarcat chiar că autorul prcblemelor *s-a ascuns sub masă*. Nefiind însă satisfăcătoare, multe dintre răspunsuri au provocat critici diatribe din partea specialiștilor. Tocmai aceste neînțelegeri l-au determinat pe Viviani să publice *Recreațiile*. Ca să le apreciezi rostul află că pe atunci nu existau alte reviste matematice, în afară de cele două publicații ale Academiilor din Paris și Londra, care se tipăreau începînd din 1685. Matematicienii care doreau să-și comunice unii altora problemele lor, o făceau prin *Anunțuri* scrise de mînă sau tipărite pe foi volante.

— Știu. Nu-ți amintești ce mi-ai povestit despre Descartes? Cum și-a început cariera lui matematică și totodată și prietenia cu Beeckman ?

— Eu ? Cred că te înșeli. Ai citit probabil undeva. Dacă vrei, te rog chiar să-mi spui și mie povestea aceasta.

— Cu plăcere. Știu că pe cînd avea 22 de ani, Descartes se afla în Olanda, la Breda, unde plecase cu regimentul din care făcea parte. Plimbîndu-se într-o zi pe stradă, a văzut un anunț în limba olandeză, care părea că ar cuprinde o problemă de matematică. A așteptat pînă ce, un alt trecător s-a apropiat curios și a citit anunțul cu atenție, meditînd asupra lui. Atunci Descartes a rugat pe necunoscut să-i traducă și lui textul în latinește. Necunoscutul, nu cu mult mai în vîrstă decît el, care avea să devină cunoscutul savant Beeckman, i-a satisfăcut curiozitatea. A făcut-o probabil mai mult din politețe, căci atunci cînd a sfîrșit nu s-a putut opri de a-i spune : „Sper să nu vă fi tradus problema degeaba. Aștept să-mi arăți și mie cît de curînd soluția !" Descartes nu l-a lăsat să aștepte mult. I-a adus-o chiar a doua zi dimineața, pe cînd Beeckman se putea gîndi la orișicine, dar în nici un caz nu la faptul că ar putea veni Descartes ca să-i aducă soluția completă a problemei ! Spune-mi adevărat, nu știam povestea asta de la tine ?

— Ba da, dar nu credeam că o mai ții minte și încă cu atîtea amănunte.

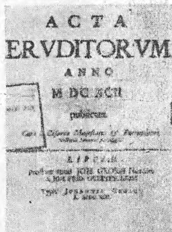
— Cu alte cuvinte, belferul din tine mai răbufnește cîteodată! Acum, ca să fiu destul de pregătit pentru un alt examen, te rog să-mi spui dacă Viviani a rezolvat toate problemele propuse de matematicianul care *s-a ascuns sub masă* ?

— Gîndeam că nu era nevoie să mai insist! Viviani nu putea face altfel decît să dea toate soluțiile posibile. Ba la acestea a mai adăugat soluțiile unor probleme propuse de alți ma-

tematicieni. De pildă, o soluție a celebrei probleme despre trisecția unghiului — adică despre împărțirea unui unghi în trei părți egale, soluție care prin simplitatea ei, a atras atenția matematicienilor francezi și au menționat-o în revista Academiei Franceze „Journal des Savants".

Peste alți 15 ani, adică prin 1690, Viviani publica o altă lucrare, și anume o traducere integrală a *Elementelor* lui Euclid. Această traducere completa fericit pe aceea făcută în 1572 de Fr. Commandino. Ea a fost imprimată de multe ori, iar după moartea lui Viviani, de mai mulți editori, fără să se mai pomenească cine era autorul. De aceea, chiar în istoria matematicilor rareori se amintește că această traducere aparține lui Viviani. Specialiștii de atunci au arătat că merită „cea mai mare laudă prin precizia și puritatea limbajului". Cred că Viviani a preferat să publice această traducere a lui Euclid în loc de traducerea tot așa de perfectă pe care o avea în manuscris, a operelor lui Arhimede, numai ca să reîmprospăteze astfel amintirea profesorului său drag, fiindcă și cu acest prilej, el a tipărit din nou ziua a cincea a lui Galileo. Anume, lucrarea lui era formată din două părți. Partea întîi cuprindea primele cinci cărți ale lui Euclid, iar a doua începea cu republicarea *Cărții* a *V-a*, așa cum a apărut ea în 1674, și aceasta era urmată de *Cărțile a VI-a*, a *XI-a* și a *XII-a*.

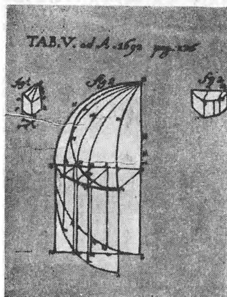
Dar timpul trecea și Viviani, deși lucra cu aceeași ardoare de totdeauna, a îmbătrînit. În 1692 avea 70 de ani. Mulți



„Acta Eruditorum"

dintre prietenii și cunoscuții lui muriseră. La început, adîncit în lucru și prins de obligații, nu se simțea singur. Dintr-o dată însă și-a dat seama că nu se mai putea înțelege cu tineretul din jurul lui. Acesta nu se mai lăsa copleșit de frumusețea operelor antice, ci se entuziasma de anumite speculații moderne, asupra infiniților mici, prin care pretindeau ei că se rezolvă chiar și probleme de geometrie ! În „Acta Eruditorum", revistă matematică editată de filozoful și matematicianului Leibniz, începînd din 1682 și pe care Viviani o primea regulat, de 10 ani de cînd își începuse apariția, a văzut articole în care se făcea aluzie la o nouă metodă geometrică de determinare a maximelor și minimelor. E drept că el nu a dat o atenție prea mare acestor lucrări, căci nu-și închipuia cum ar putea rezolva *această nouă metodă* o problemă de geometrie. Ar putea fi depășit nivelul pe care l-a atins gîndirea geometrilor greci ? Și totuși, parcă îl încerca o îndoială. Ce-ar fi să se convingă ? Ce-ar fi să pună la încercare pe acești tineri care-și dau aere de atoateștiutori ?

Potrivit obiceiului timpului, a propus o problemă, spre a fi dezlegată de către tinerii matematicieni și analiști, *deținători ai artei secrete.* A trimis-o lui Leibniz ca să i-o publice



Desenul din problema lui Viviani apărut în „Acta Eruditorum"

în „Acta eruditorum", și totodată, tipărită pe o foaie volantă, a adresat-o matematicienilor binecunoscuți atunci, ca Iacob Bernoulli, l'Hospital, Wallis, Huygens si alții. Problema a apărut în „Acta eruditorum" din luna iunie 1692, cu titlul „Enigma geometrică propusă de D. Pio Lisci Pusillo, geometru, iluștrilor analiști, încredințat fiind că prin arta lor secretă vor rezolva-o curind" și era formulată cam așa : „Printre anticele monumente ale Greciei, templul consacrat geometriei avea formă circulară și era încoronat cu o cupolă emisferică. Această cupolă era străbătută de patru ferestre egale și construite în așa fel, încît restul suprafeței să fie absolut cvadrabil. Cum au procedat geometrii antici ?"

— Observ că și Viviani *s-a ascuns sub masă,* căci nu și-a dat adevăratul nume, ci un pseudonim.

— Ba de loc ! Numele *D. Pio Lisci Pusillo geometra* era o anagramă formată din *Postremo Galilei discipulo,* adică ultimul elev al lui Galilei. Ți-am spus că el considera faptul de a fi fost ultimul discipol al lui Galilei cea mai înaltă distincție. Or, matematicienii cărora le-a adresat problema au dezlegat ușor anagrama, fiindcă acest gen de transmitere a mesajelor nu era numai o distracție la modă, ci se folosea și drept mijloc de comunicare a soluțiilor unor probleme ca astfel să-și păstreze pr ioritatea.

— Și ce se înțelege printr-o suprafață cvadrabilă ?

— O suprafață a cărei arie se măsoară prin numere raționale, ca și aria unui pătrat, dreptunghi, triunghi sau a oricărui alt poligon cu laturi exprimate în numere raționale. Cercul nu

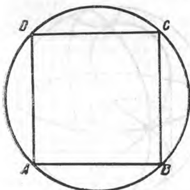


Fig. 3

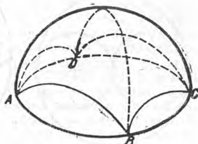


Fig. 4

este absolut cvadrabil, fiindcă aria lui se calculează după formula πr^2, iar π nu este un număr rațional, ci transcendent.

— Bine, dar dacă cercul nu-i absolut cvadrabil îmi închipui că nici sfera nu poate fi absolut cvadrabilă, fiindcă și în aria sferei intervine numărul π. Nu înțeleg atunci pretenția lui Viviani ?

— Uite, ca să înțelegi problema mai ușor, am să ți-o transpun în plan. O fac și eu cu un sentiment de duioasă aducere aminte, fiindcă acest exemplu îl țin minte de demult, de cînd eram student. L-am auzit la unul dintre colocviile de matematicieni ce se țineau atunci în afara orelor de curs și seminar, sub conducerea venerabilului meu profesor, academicianul Alexandru Myller. Parcă-l văd... Era un colocviu în care se discutau proprietățile curbelor lui Viviani. Înainte de a începe discuțiile, el s-a dus la tablă, a luat creta și, după ce a desenat un cerc, a înscris în el un pătrat (fig. 3) și ne-a spus : „Cercul nu închide o suprafață absolută cvadrabilă, dar dacă se înscrie în el un pătrat, atunci dreptele AB, ΓC, CD și DA taie segmente din cerc în așa fel, că porțiunea care rămîne este absolut cvadrabilă, avînd ca arie $2r^2$. Cu alte cuvinte, π s-a înlocuit cu 2 ! Considerînd o cupolă în formă de emisferă, rolul pe care-l aveau laturile pătratului trebuie să-l joace acum curbele sferice care mărginesc cele patru ferestre ale lui Viviani și care sînt așa încît aria suprafeței ce rămîne după ce s-au tăiat ferestrele să fie $4r^2$ (fig.4)".

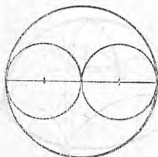


Fig. 5

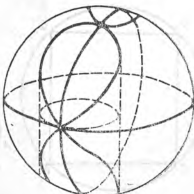


Fig. 6

— E foarte intuitiv exemplul. Mai ales fiindcă procedeul repetă formal pe acela din cazul cercului. Aria unei emisfere este $2\pi r^2$ și dacă înlocuim π cu 2 obținem tocmai $4r^2$!

— Ai ghicit !

— Bine spus. Am ghicit procedeul formal, încolo habar n-am nici cum se obțin ferestrele și nici cum se calculează aria lor !

— Habar n-ai cum se obțin ferestrele ? Dar parcă cu cîteva ceasuri mai devreme îmi dădeai rețeta pentru dulceața de caise verzi.

— Atunci e vorba de cilindrul acela cu care se găurește sfera ?

— Nu despre un cilindru, ci despre doi cilindri circulari egali, avînd fiecare diametrul bazei cît raza sferei și fiind așezați unul lîngă altul, lipiți printr-o generatoare...

— Da, văd clar de tot figura. Această generatoare comună se află chiar în planul de bază al emisferei și deci cei doi cilindri care străbat sfera taie emisfera numai cu cîte o jumătate din suprafața lor (fig. 5), formînd astfel cele patru ferestre, la fel de mari, pe care le-aș desena așa (fig. 4).

— Eu aș încerca să-ți fac un desen mai complicat, în așa fel încît să apară și cilindrul și curbele lui de secțiune (fig. 6), uite cum e acesta. Parcă se vede mai clar aici că generatoarea comună celor doi cilindri trece prin centrul sferei și fiecare dintre cilindri este tangent la sferă în punctele diametral opuse de pe acelaș diametru al sferei, nu ? Această curbă de intersecție dintre sferă și cilindru se numește „curba lui Viviani".

— Dar cum a stabilit el soluția ?

— Viviani nu a indicat metoda pe care a folosit-o. O demonstrație geometrică a fost dată peste 7 ani de un alt matematician italian, Guido-Grandi, într-o lucrare intitulată *Ghicirea geometrică a problemei lui Viviani*. Ulterior, a mai fost găsită o demonstrație printre hîrtiile lui Huygens și publicată în operele sale complete. Binecunoscutul cercetător al istoriei matematicilor, Paul Tannery, într-un articol intitulat *Despre linii și suprafețe curbe în antichitate*, arăta că și matematicienii greci și-au pus problema determinării unei suprafețe sferice exact cvadrabile și înclina a crede că ei au cunoscut însăși curba lui Viviani. Paul Tannery deducea aceasta din scrierile lui Pappus și afirma că ea nu-i alta decît *curba paradoxală a lui Menelaos*.

— Paradoxală ? Probabil că în sensul vechi al cuvîntului, de *minunată, extraordinară,* și nu în acela al nostru, de *ciudat, contradictoriu* ?

— Da, în prima accepție a cuvîntului, Tannery susținea această ipoteză și o motiva prin prezentarea unei alte curbe, la fel de remarcabilă, cunoscută azi sub numele de *Spirala lui Pappus.*

— Spirala lui Pappus ? Eu cunosc altă spirală, aceea a lui Arhimede. Chiar știu să o desenez.

— Da, dar cu compasul, nu-i așa ?

— Sigur că da, cu compasul ; am învățat-o la desen !

— Ceea ce ai învățat tu la desen seamănă cu spirala lui Arhimede, căci aceasta nu-i formată din arce de cerc racordate între ele. Însă apropierea care ai făcut-o cu spirala lui Arhimede nu-i rea ! Știi poate și cum se definește această curbă plană ?

— Natural. Locul descris de un punct care se mișcă uniform pe o dreaptă, începînd de la un punct fix, în timp ce dreapta se rotește uniform în jurul acelui punct fix.

— Bine. Acum schimbă dreapta cu un cerc meridian pe sferă și vei vedea definiția spiralei lui Pappus !

— Cam complicat, dar să încerc. Așadar, trebuie să consider o sferă și pe această sferă un plan meridian, care se rotește în jurul axei polilor, pornind de la un plan meridian fix luat ca origine. Acestea sînt elementele care corespund dreptei din plan și punctului fix de pe dreaptă în jurul căreia se învîrte ea.

— Exact. Acum nu-ți mai rămîne decît să plasezi punctul și să-i stabilești mișcarea.

— Asta te rog să o faci tu.

— Bine. Consideră că punctul pornește din pol și parcurge cercul meridian cu o mișcare uniformă, în așa fel că, în timpul cît acest punct parcurge un sfert de cerc, cercul meridian. pe care se află el, se rotește cu o viteză constantă în jurul axei și revine de unde a plecat.

— În acest caz, punctul descrie o curbă în formă de elice trasată pe suprafața sferei. Era deci necesar să i se spună *spirală,* numai că e o *spirală sferică.*

— Această curbă are și ea proprietatea curbei lui Viviani, anume că aria porțiunii de pe sferă cuprinsă între spirală, meridianul fix de pe sferă și planul ecuatorului este egală cu pătratul diametrului sferei, adică tot cu $4r^2$. Dacă ne întoarcem la curba lui Viviani, pot să adaug că ea a mai fost folosită și de alți matematicieni, chiar înainte de Viviani, de pildă

Gottfried Wilhelm Leibniz



şi de Descartes. Totuşi, după cum ţi-am mai spus, curba care mărgineşte ferestrele cupolei sferice din problema adresată de Viviani, în 1692, poartă numele lui, în semn de omagiu pentru problema care a interesat şi încîntat pe atîţia matematicieni, conducînd la multe rezultate noi,

— Problema lui Viviani reprezenta o provocare, nu ?

— El pretindea că nu. În prefaţa cărţii lui Viviani, *Formarea şi măsurarea oricărei cupole*, publicată după cîteva luni de la trimiterea problemei, el caută să înlăture această suspiciune, spunînd : „Nu pretind că problema reprezintă o provocare sau o chemare la duel, căci aceasta mi-a fost odios întotdeauna, dar simt dorinţa de a cunoaşte multiplele căi prin care celebrii analişti moderni vor fi conduşi spre un acelaşi adevăr geometric, aşa de frumos". În realitate, eu cred că problema a fost o provocare.

— Şi rezultatul ?

— Pentru Viviani un *dezastru* sufletesc, pentru istoria matematicilor o *problemă celebră* !

— Iar vorbeşti ii doi peri ?

— Deloc. Judecă singur. Leibniz a publicat în „Acta eruditorum" primul răspuns, chiar pe pagina care cuprindea

și enunțul. El a aplicat pentru prima oară calculul infinitezimal la determinarea ariilor suprafețelor care nu sînt plane și, stabilind rezultatul, adăuga încîntat : „Iată cît de fecundă apare analiza mea infinitezimală !" Viviani a constatat veridicitatea rezultatului, dar nu și-a dat seama cum a putut fi găsit ?

Tot în „Acta eruditorum", din același an, Jacob Bernoulli a găsit cinci soluții diferite ale problemei, pe care a numit-o *enigma florentină*. Viviani le accepta uimit și se întreba cum au fost stabilite ?

— Nu înțeleg de ce pot exista cinci soluții diferite ale uneia și aceleiași probleme ?

— Fiindcă problema pusă de Viviani era nedeterminată, în sensul că o porțiune de sferă exact cvadrabilă ar putea fi mărginită de curbe diferite. Ai văzut că și spirala lui Pappus putea fi o soluție ! Fără întîrziere i-a rezolvat problema și marchizul de l'Hospital din Paris. În același, an apărea în „Philosophical Transaction" soluția marelui matematician englez John Wallis la *Problema Florentinum*, iar David Gregory a publicat rezultatele aflate de el în 1694. Huygens n-a răspuns, deși s-a putut constata, din mai multe scrisori adresate marchizului de l'Hospital, că a cercetat această problemă și i-a stabilit o soluție. Într-un articol publicat în 1953, Luigi Tenca urmărește răsunetul pe care l-a avut *Problema florentină* după scrisorile adresate atunci direct lui Viviani din Amsterdam, Hanovra, Londra, Madrid, Oxford, Praga etc., scrisori în mare parte inedite, care se păstrează în Biblioteca națională din Florența. Alături de numele pomenite de mine, sînt citate acelea ale lui Varignon, Frații Ceva, Giordano, Grandi, Saccheri și altele acum uitate. În toate aceste scrisori se găsesc cuvinte de laudă și admirație atît pentru problema propusă de Viviani, cît și pentru cartea sa *Formarea și măsurarea oricărei cupole*, care generalizează problema. Te întrebi dacă aceste răspunsuri nu-l vor fi copleșit îndeajuns ? Ascultă ce-i spunea matematicianul francez de la Hire, în scrisoarea sa, după ce elogiază *forța genială* cu care Viviani analiza „într-un mod așa de fericit" diferitele cuadraturi ale secțiunilor dintre sferă și cilindru : „Nu vă pot spune, ca dl. Leibniz, că am rezolvat enigma dv. în chiar ziua cînd am primit scrisoarea, căci eram foarte ocupat atunci și cînd aș fi avut timp să dau o soluție ca a lui, pe care o consider neînsemnată, mi-ar fi fost rușine de ea, după ce am văzut-o pe a dv., diversificată în multe variante așa de elegante. E

Cristiaan Huygens



adevărat că aveți un mare avantaj față de cei cărora le-ați propus problema, dar dacă consider faptul în sine, crește stima pe care știți că o am de mult pentru meritele dv., cărora le-am adus mărturie publică..."

— Da, scrisoarea asta are iz de consolare !

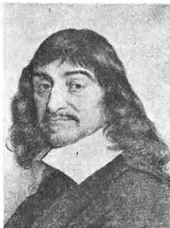
— Asta-i și părerea mea, de aceea ți-am redat aceste cîteva rînduri pe care nu le-am uitat.

— Totuși, cuvîntul *dezastru* îl găsesc cam exagerat. Eu cred că dezamăgirea lui a fost din plin compensată de atîtea dovezi măgulitoare despre interesul pe care l-a stîrnit problema propusă de el.

— Nu sînt de părerea ta ! Să nu uiți că Viviani a fost obișnuit să i se recunoască talentul de geometru de la 16 ani. De atunci el era considerat, de către cei competenți, drept unul dintre cei mai abili mînuitori ai teoremelor din geometria greacă. Cel mult Huygens — marele și neîntrecutul Huygens — ar fi putut să-l provoace la o întrecere. Or, la 70 de ani, după o carieră așa de îndelung glorioasă, plăcerea de a ți se recunoaște că ai propus o problemă interesantă, căci el știa foarte bine că problema era interesantă, poate compensa sau înlătura constatarea eșecului? Această problemă a fost trimisă în lume ca o provocare și, prin răspunsurile obținute, ea s-a întors asupra lui ca un bumerang ! El nu și-a închipuit că *problema lui*, pusă pe cîntarul analizei infinitezimale, va trage așa de ușor ! Vezi tu, o problemă este interesantă cînd soluția cere un efort intelectual, o anumită subtilitate și Viviani

nu a ezitat să-şi înzestreze problema cu o asemenea calitate. El credea că propusese tinerilor analişti o problemă foarte grea, la care spera să-i vadă muncind din răsputeri pînă să-i întrevadă soluţia ; şi, cînd colo, problema le-a apărut lor ca o jucărie, ca un simplu exerciţiu şi i-au fost prezentate soluţii cu duiumul şi pe nerăsuflate ! Oare nu-i un dezastru să-ţi dai dintr-o dată seama că te-ai înstrăinat de obiectul preocupărilor tale de geometrie ? Căci din răspunsurile primite el a văzut mai bine ca oricine altul, că nu mai posedă cu adevărat geometria, că el nu cunoaşte acele *metode subtile şi noi prin care se putea ajunge uşor şi repede la soluţie,* ocolind drumurile lungi, desişurile încîlcite sau prăpăstiile cu punţi şubrede! El nu a bănuit că tinerii analişti, pe care îi privea cu neîncredere — fiindcă nu adînceau suficient metodele antice ale geometriei — ar fi în stare să făurească instrumente noi de cercetare a ştiinţei matematice şi în particular a geometriei, instrumente cu care aveau dreptul să se mîndrească, aşa cum a făcut-o Leibniz cînd a scris : „Iată cît de fecundă apare *analiza mea infinitezimală*". Da ! La 46 de ani, Leibniz avea *analiza lui,* cu ajutorul căreia a stabilit în cîteva clipe rezultatele la care el, Viviani, după 50 de ani de continuă cercetare a geometriei, nu a fost în stare să ajungă decît după îndelungă vreme. Iar Jacob Bernoulli, care avea numai 40 de ani, i-a arătat dintr-o dată 5 *soluţii diferite ale problemei,* pe cînd el nu-i văzuse decît una singură ! Atunci şi-a dat seama de zădărnicia strădaniei lui de o viaţă întreagă ca să se integreze în gîndirea geometrilor greci şi a înţeles că frumuseţea acelor demonstraţii l-a vrăjit ca o pălălaie de foc pe timp de iarnă. Sub vraja limbilor de foc, a rămas închis în casă şi a continuat să se încălzească la sobă, în timp ce afară venise primăvara, primăvara matematicilor, una dintre acele primăveri clocotitoare de sevă, cu ghiocei şi brebenei care străpung pătura de zăpadă... Însăşi anagrama pe care a compus-o fericit : „D. Pio Lisci Pusillo geometra" îl privea cu cei mai batjocoritori ochi pe care i-a văzut vreodată în viaţă, spunîndu-i parcă : Tu eşti ultimul elev al lui Galileo ? Poate ! Dar ar fi bine să te consideri cel mai netrebnic elev al lui Galileo ! Ai putut sta tu în preajma lui, a aceluia ce a dăruit oamenilor de ştiinţă, ramuri de magnolia încărcate de bobocii care-şi desfăceau petalele mari şi aburii fără să te atingă căldura soarelui de primăvară ? N-ai simţit ceva care se ridică deodată în firele de iarbă şi-n mugurii copacilor? Cum îndrăzneşti să te numeşti *tu ultimul elev al lui Galileo,*

René Descartes



dacă n-ai cercetat și n-ai căutat ce este nou, *noul* pe care el l-a semănat prin opera lui ? I-ai scris viața, ai pronunțat de atîtea ori „Due nuove Scienze" și nu ți-ai dat seama că *cele două științe noi* nu pot rămîne singure și izolate ? Că *știința nouă, bazată pe observație și experiență*, pe care o promovează Galileo, are nevoie și de o geometrie nouă, de mijloace noi de investigație matematică ? Ai tipărit tu însuți *Cartea a V-a* a lui Euclid, cu observațiile pe care le-a făcut *bunul bătrîn*, cum îl numește Segredo, dar și tu te-ai oprit numai la gîndurile ce erau noi cu 2 000 de ani în urmă ? Ai rămas să te joci cu metodele clasice cum se joacă un copil cu jucării și, mulțumit de bucuriile pe care ți le aduceau rezultatele obținute, ai reușit să te înstrăinezi de însuși obiectul care ți-a fost cel mai drag pe lume, de geometrie, adică de viața ta sufletească, de tine însuți!

— Da. Cred că D. Pio Lisci Pusillo avea dreptate să se războiască cu Viviani. În secolul al XVII-lea, și mai ales în a doua lui jumătate, se observa o efervescență generală... Descartes și filozofia carteziană în lupta fățișă și acerbă cu scolastica...

— Exact. Cu totul alta a fost situația cu vreo 60—70 de ani în urmă. Dacă ar fi trăit atunci, prin activitatea lui, Viviani ar fi putut contribui în mod efectiv la progresul matematicilor. Însă acum era prea tîrziu, zăpada se topise, pămîntul era reavăn și aștepta să fie din nou semănat. Ca să vezi clar ce s-a petrecut atunci am să-ți enumăr numai cîteva dintre

faptele matematice importante. În 1637, Descartes publica în Olanda, la Leyda, *Discurs asupra metodei*, stabilind o nouă cale în tratarea problemelor geometrice, prin corespondența dintre cel mai simplu element geometric—punctul — cu cele mai simple elemente ale algebrei : dubletul de numere algebrice. Mai tîrziu, metoda lui s-a extins și la corespondența dintre punct și un triplet sau chiar cu o mulțime *n* de numere algebrice.

— Vrei să spui că o dată stabilită această corespondență, raționamentul geometric asupra punctului se traduce printr-un calcul algebric asupra coordonatelor punctului din plan sau din spațiu cu trei ori mai multe dimensiuni ?

— Da. Tot prin 1637, Fermat, alt îndrăgostit și adînc cunoscător al geometriei antice, pornind de la metoda prin care Arhimede găsise aria unui segment de parabolă...

— Stai. Aici vreau să te opresc ca să-mi lămurești ceva. De cînd eram elev m-am întrebat de ce în cărțile de geometrie se stabilește numai formula ariei triunghiului, a pătratului, a unui poligon și a cercului și nu se arată nici o formulă prin care să se calculeze aria unei suprafețe plane mărginite de un contur curbiliniu oarecare?

— Foarte simplu. Geometria lui Euclid nu are mijloace de a stabili o asemenea formulă. Această problemă numită a *cuadraturii*, vor rezolva-o în acest veac al XVII-lea Newton și Leibniz, avînd ca premergători întîi pe Arhimede, apoi pe Kepler, Cavalieri, Fermat și alții. Tocmai vroiam să-ți spun că Fermat a generalizat o metodă a lui Arhimede ca să calculeze astfel aria unor suprafețe plane mărginite de linii, ale căror ecuații sînt mai complicate decît aceea a parabolei. Ecuația $y=ax^2+bx+c$ reprezintă, după cum știi bine, o parabolă!

— Da, știu, reprezentarea grafică a trinomului de gradu al doilea... inegalități de gradul al doilea...

— Deși Fermat nu a publicat rezultatele sale, ele erau cunoscute de matematicienii care urmăreau problemele moderne din corespondența particulară pe care o aveau între ei. Geometria s-a mai îmbogățit atunci și cu alte rezultate nebănuite. În 1667, James Gregory, în vîrstă de numai 29 de ani (Viviani avea 45) publica la Padova vestita carte *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, în care arăta un procedeu general de a găsi aria oricărui sector de conică cu centru. Dar să nu uităm că în 1643 se năștea Newton și că în 1669 apăreau *Lecțiile de geometrie* ale lui Barrow, profesorul lui Newton,

unde, pe de o parte erau folosite ideile lui Galileo și, pe de altă parte, se anticipa asupra *calculului diferențial*. În 1684, Leibniz publica memoriul, rămas celebru, despre calculul diferențial. Metoda era cunoscută de mai înainte, căci el inițiase cîțiva elevi în acest uluitor mijloc de calcul, numit într-o vreme și *calcul sublim*. Iată în ce direcție se îndreptau gîndurile tinerilor matematicieni din a doua jumătate a acelui veac, îndepărtîndu-se de drumul cunoscut.

E drept că nu toți matematicienii de atunci au sesizat aceste metode noi. Chiar Huygens, pe care Leibniz îl considera ca profesorul lui de matematici, deși era oarecum la curent cu noile descoperiri ale lui Leibniz, nu s-a simțit atras de aceste *noi concepții*, care vor modifica însăși structura matematicilor viitoare. Tîrziu de tot, cînd a observat succesele metodei nou introduse, el și-a propus să se documenteze mai serios și probabil că a reușit să-și satisfacă curiozitatea, *dar nu a folosit niciodată metoda analizei infinitezimale în lucrările sale*, pentru că aceasta îi apărea prea formalistă! Poate că și el, ca și Viviani și ca și alți matematicieni de atunci nu au dat de la început importanța cuvenită noului calcul, fiindcă nu se puteau desprinde din farmecul pe care-l degajau încă, prin precizia și logica acelor sobre demonstrații de loc simple sau ușor de înțeles, operele clasicilor greci. Arhimede, mai ales, exercita o atracție deosebită și trezea o admirație extraordinară prin teoremele descoperite de el, de multe ori enunțate fără demonstrație. Urmărind să restabilească acele demonstrații, Viviani a parcurs numai cărările trecutului. Alții însă, cercetînd metodele antice, le-au depășit. Astfel, Fermat, căutînd cu mult înainte de Viviani, prin 1629, să reconstitue, tot după indicațiile lui Pappus, o altă operă pierdută a lui Apolloniu, numită *Loci Plani*, nu s-a oprit numai la această încercare de reconstituire, ci a dus mai departe ideile de acolo, ajungînd la primele noțiuni de geometrie analitică. Fermat s-a descătușat de lanțurile antichității, pășind spre viitor. El a trăit astfel în prezent, pe cînd Viviani a rămas prins în păienjenișul speculațiilor geometrice de odinioară, mulțumindu-se să-și facă un ideal din ghicirea unor opere pierdute sau din traducerea perfectă a acelora care s-au păstrat.

— De ce spui mereu *ghicire*? Cred că ar trebui să spui *reconstituire*.

— Nu! Este o deosebire între o noțiune și alta, iar Viviani și-a intitulat lucrările *divinatio*, adică *ghicire*. Această deosebire a fost făcută de un pasionat și adînc cunoscător al

istoriei matematicilor, Gino Loria. El accentua că *intenția* lui Viviani a fost aceea de a *ghici* și nu de a *reconstitui* operele pierdute de care s-a ocupat, dat fiind că el avea prea puține elemente de la care să poată porni ca să poată face o reconstituire a lor! Cînd s-a decis să întreprindă această *ghicire*, el s-a bazat numai pe spiritul lui geometric, pe adînca cunoaștere a geometriei clasice și pe imaginația lui. De aceea chiar dacă *reconstituirea* nu a reușit, *ghicirea* lui Viviani a reprezentat o continuare, un adaus la opera lui Apolloniu, fiind compusă în spiritul lui. Și tocmai acesta-i meritul de creator pe care l-a cîștigat Viviani, fără să-l fi urmărit!

— Atunci de ce-mi spui că Viviani s-a simțit înstrăinat, că a suferit din această pricină? Poate că, din contră, izolat în cercetările lui, el s-a simțit foarte fericit! Ai găsit cumva în amintirile lui că ar fi trecut prin atari angoase?

— Nu. Nu din amintirile lui i-am cunoscut *angoasa*—cum spui tu—ci din *hotărîrea* lui de a propune problema cu *cupola cuadrabilă*. Problema era grea și era aleasă anume în așa fel ca să nu o poată dezlega decît un geometru abil, de puterea lui Viviani. Matematicianul de la Hire l-a priceput, bine, ai văzut ce-i scria : „aveți un mare avantaj față *de cei cărora le-ați propus problema*". De altfel, trebuie să-ți spun că mie nu mi-a fost greu să-i ghicesc starea lui sufletească, fiindcă azi ea se repetă în sufletul meu și al multor altora, să nu spun matematicieni — poate că-i prea greu cuvîntul—, dar cunoscători sau îndrăgostiți de matematici din generația mea. Același proces de reînnoire, de răbufnire, care s-a petrecut în a doua jumătate a veacului al XVII-lea, cristalizîndu-se și desăvîrșindu-se treptat în veacurile următoare, s-a declanșat și mai tumultuos acum, începînd, să zicem, din preajma primului război mondial. Ca și atunci, această reînnoire s-a petrecut fără trîmbițe.

În 1925 — 1929, pe cînd am urmat cursurile de matematici, aceste cursuri cuprindeau, în linii generale, tot problemele clasice pe care le puteai citi din tratate sau manuale. De pildă, în geometria diferențială, cărțile lui L. Bianchi, G. Darboux, G. Loria, W. Blaschke, B. Riemann erau moderne și celebre prin problemele, ideile și rezultatele noi ce le cuprindeau. În revistele de matematici se tratau problemele de geometrie diferențială, bazîndu-se pe aceste concepții și folosindu-se notațiile din aceste cărți, de aceea eu le puteam citi destul de ușor. Or, domeniul care-mi părea, prin 1930—1940, că-l cunosc bine, acel al geometriei diferențiale, cu linii

de curbură sau geodezice, cu suprafețe care satisfăceau condiții complicate, cu admirabile generalizări ale noțiunii de curbă, cu discuții despre aplicabilitatea suprafețelor una pe alta, cu acea, modernă atunci, noțiune de paralelism în sens Levi-Cività... toate acele probleme au devenit pentru tînărul geometru de azi, care mînuiește cu ușurință problemele de topologie și axiomatică, niște naive exerciții de seminar. După ce am terminat și am plecat din Iași, am continuat să urmăresc problemele care-mi plăceau și chiar să găsesc unele rezultate noi. Școala și alte griji au întrerupt cîtăva vreme aceste preocupări. Apoi a venit războiul cu toate calamitățile lui.

Peste vreo 15 ani, adică după 1955, rămînînd mai multe zile la Iași, m-am dus din nou la Seminarul matematic, ca să mai răsfoiesc revistele care mi-erau odinioară tovarășe, și am căutat articole de geometrie diferențială. Nu mi-a trebuit mult ca să înțeleg realitatea. Aproape totul mi-era străin : titluri, notații și concepții. Rare de tot erau articolele care aminteau trecutul. Parcă nici nu mai era vorba de geometrie, ci de altă ramură a matematicilor, ce putea fi analiză, sau topologie, sau teoria mulțimilor sau toate la un loc. Am crezut că visez. Cîțiva tineri asistenți, îndrăgostiți de matematici, cum eram și eu odinioară, discutau cu pasiune aceste lucrări și nu arătau nici o greutate în mînuirea noilor calcule și a problemelor care îmi păreau atît de străine și pe care nu le voi mai putea urmări nici rezolva eu vreodată! Dar aceasta nu s-a întîmplat numai în domeniul meu. Întîlnindu-mă cu un fost coleg, care a continuat să se ocupe de matematici și a devenit în ramura sa un mare om de știință mi-a spus că și în analiza matematică, de pildă, s-a petrecut exact același fenomen, că și pentru el există azi ramuri *din specialitatea lui* care-i sînt străine, că sînt probleme care l-au depășit și pe care el nu le mai poate urmări, deși el nu a întrerupt, ca mine, studiul, iar acele probleme aparțin domeniului în care lucrează.

— Mi se pare că această situație, aș spune această explozie, se observă azi și în celelalte domenii ale creației, atît culturale, cît și artistice, avalanșa lucrărilor tipărite în ultima vreme periclitînd însăși problema informării.

Nu demult am citit într-un articol că, pe baza materialului existent în 1940, se calculase că știința își va dubla volumul în fiecare 50 de ani. Dar după ce mașinile de calcul au devenit colaboratorii omului de știință, prevederile s-au dovedit a nu mai corespunde realității! Ca urmare a diviziunilor succesive

ale ramurilor științifice, în 1950 s-a constatat că volumul științei urmează să se dubleze la fiecare 10 ani. Iar în 1960, o nouă apreciere a redus rația la 7 ani. Îți spun drept că multă vreme m-au chinuit aceste constatări uimitoare. Cum adică? În 7 ani creierul omenesc poate inventa, descoperi și stabili acum tot atîtea fapte, cîte le-a creat *același creier* omenesc din preistorie și *pînă acum 7 ani*?

— Să nu te uimească! Știi că numărul revistelor tehnice pe care le primește regulat Biblioteca Institutului politehnic din Iași trece de 3 000? Dar, de ce să-ți dau această informație pe care am auzit-o și eu de la alții și să nu mă refer la ceea ce am văzut cu ochii mei, astă iarnă, cînd am trecut ultima dată pe la Seminarul matematic „A. Myller" din Iași? Am întrebat cîte reviste se primesc acum și mi s-a spus : 268. Gîndește-te! Două sute șaizeci și opt de reviste, în care se tratează numai probleme de matematici și desigur că acestea nu reprezintă toate revistele de pe glob. Or, cînd eram student și mă duceam acolo să citesc reviste, existau numai 111 titluri. N-am uitat cifra, măcar că de atunci au trecut 40 de ani ; erau 111 reviste diferite de matematici, toate încuiate în dulapul cu chei. Mă uitam la ele și mă gîndeam că avem cea mai bogată bibliotecă din tot sud-estul Europei. Biblioteca se compunea pe atunci numai din două camere, în care se vedeau cărțile și revistele puse în dulapurile cu geamuri și uși, care ocupau destul de mult loc! Acum, seminarul are cinci camere, iar cărțile sînt așezate pe rafturi deschise și foarte dese de-a lungul pereților, pînă sus în bagdadie. Cine ar mai fi în stare să urmărească toate aceste reviste, chiar dacă am presupune, prin absurd, că ar exista cineva care ar putea fi la curent cu toate problemele care se pun azi în matematici? Fă și tu o socoteală, de obicei revistele apar lunar, altele mai rar. Ca să citești un articol îți trebuie uneori o săptămînă, alteori mai mult sau mai puțin, să zicem un ceas, două... Admițînd că în 268 de reviste sînt în medie 1 000 de articole și socotind o oră de fiecare articol, ai nevoie de vreo 3 luni ca să parcurg tot materialul venit într-o lună, admițînd că citești cîte 10 ore pe zi!

— Această problemă o punea și articolul despre care-ți vorbeam. Autorul observa că vertiginoasa creștere a volumului științei atrage după sine două probleme foarte spinoase : întîi depozitarea acestui material acumulat și apoi metode rapide de găsire a informațiilor de care ai nevoie.

— Tocmai aici voiam să ajung şi eu. Din cea mai adîncă antichitate, creierul omenesc a fost şi depozitul cunoştinţelor stabilite de el. Hinduşii transpuneau în versuri toate descoperirile, chiar şi pe cele matematice, pentru ca astfel să fie uşor de reţinut. Mai tîrziu, după ce a fost inventată scrierea, tot capul unor anumiţi oameni erau depozitul cunoştinţelor stabilite, aşa fel că atunci, cînd alţii aveau nevoie de ele, obţineau informaţii prin întrebarea directă a acelora care le posedau : magii, savanţii, învăţătorii etc. Tot ei au îndeplinit această funcţie şi mai tîrziu, cînd volumul cunoştinţelor devenise destul de mare ca să nu mai poată fi reţinut de o minte omenească. Anume, ei extrăgeau esenţa scoasă din mulţimea acelor cunoştinţe şi o depozitau într-o singură carte. În aceasta se găseau referinţele la sursele din care s-au extras informaţiile.

— Într-adevăr, însă o dată cu inventarea tiparului, cînd bibliotecile s-au înmulţit, devenind astfel accesibile unui număr tot mai mare de indivizi, la rîndul lor aceşti indivizi au contribuit la dezvoltarea bibliotecilor prin lucrările pe care le elaborau ei, acei ce primeau informaţiile. Aşa se face că azi, chiar cu cele mai straşnice îmbunătăţiri tehnice, bibliografia pe care ţi-o pun la îndemînă revistele de recenzii, clasificate după cele mai precise specializări, tinde să fie depăşită! Deşi sînt foarte curios să ştiu cum se va soluţiona această problemă în viitor, găsesc mult mai interesant să urmăresc chiar acest procedeu de înstrăinare, care se infiltrează treptat, ca un virus, peste tot : în artă, literatură, ştiinţă, tehnică şi chiar viaţa de toate zilele. Tu, om de ştiinţă, să te simţi străin în chiar casa ta? Să nu te mai poţi mişca nestingherit decît în cîteva încăperi, fiindcă toate celelalte sînt ocupate de necunoscuţi?

— Da, asta a fost şi tragedia lui Viviani, a reluat prietenul meu. În răspunsurile primite la problema propusă, el d e s c o p e r ă e x i s t e n ţ a u n o r m i j l o a c e d e i n v e s t i g a ţ i e c u t o t u l s t r ă i n e de mentalitatea lui. Fiind compuse din elemente deosebite de acelea a căror natură îi erau familiare lui, nu le mai putea urmări. Demonstraţiile primite de el nu se mai sprijineau nici pe figuri egale sau asemenea, nici pe construcţii formale din drepte sau plane paralele din care să rezulte egalităţile sau rapoartele care conduc la dezlegarea problemei. El a găsit formule care închideau semne curioase, calcule cu litere, din care pricepea mai puţin decît dintr-o anagramă... dar faţă de care nu a rămas indiferent, ci plin de admiraţie. De-abia acum a văzut că trăinicia

acelui pod minunat pe care l-a construit cu atîta migală ca să lege lumea lui cu lumea antică nu mai are nici un rost. Leibniz a găsit un drum nou, aruncînd o punte, în altă direcție, dar Viviani avea ochii prea împăienjeniți ca să se mai poată încumeta să pășească pe o punte, cu bîrne care-i fug de sub picioare. A preferat să folosească și mai departe podul lui larg, cu parapet, chiar dacă drumul era mai lung, chiar dacă pe el întîlnea din ce în ce mai puțini trecători... Vezi, cam același lucru se petrece și în zilele noastre... În matematica secolului al XX-lea nu se mai vorbește de un singur spațiu, de spațiul acela odihnitor și primitor cu trei dimensiuni, în care așezai cum îți plăcea toate dreptele și curbele, toate planele și suprafețele sau toate corpurile geometrice. Nu, acum există o mulțime de spații și subspații, cu oricîte dimensiuni poftești : spații proiective, spații topologice, subspații ale spațiilor Finsler, sau Cartan și multe, foarte multe altele. Dar nu ți-am enumerat noile ramuri de sine stătătoare ale matematicilor, ca analiza numerică, teoria informației, statistica etc.

— Bine, dar atunci în matematica modernă e un adevărat haos?

— De ce? Oare mulțimea stelelor de pe cer ți-a dat vreodată impresia de haos? De cîte ori nu m-ai oprit pe cînd rătăceam tîrziu noaptea, cum prevăd că ni se va întîmpla și azi, dacă nu vrei să cobori îndată de aici, ca să cauți Lira, Andromeda cu Perseu, Pegas, Bourul sau Văcarul, ba chiar să te războiești, ca un Făt-Frumos, cu Balaurul, care se cam ascundea printre Carul Mare și Carul Mic ca după ce-l prindeai, să privești triumfător spre Casiopeea, căreia ție îți place să-i zici Coromîsla, cum o numea mama ta, care ți-a arătat-o întîi!

— Bine, dar în astronomie e altceva! Pe astronomi nu-i încurcă puzderiile de stele pe care le întîlnesc în orice parte a cerului ar încerca să-și îndrepte ei luneta, fiindcă ei și-au organizat cercetările pornind de la această situație!

— Dar și matematica modernă și-a organizat cercetările pornind de la această situație, la care era de așteptat să ajungă acum, cînd tehnica modernă a pus la dispoziția omului spațiul extraterestru cu imponderabilitatea lui cu tot! Am impresia că în epoca noastră se repetă, pe o scară mai largă, același proces de surprinzătoare dezvoltare a științelor care s-a petrecut prin veacurile al XVI-lea și al XVII-lea! Atunci operațiile cu mărimi variabile, pulverizarea mărimilor finite

în mărimi infinit mici și infinit de multe, operațiile cu numere negative sau complexe păreau paradoxale și nu puteau fi concepute de un spirit obișnuit și să opereze numai cu numere constante, reale și pozitive, sau numai cu segmente de lungime finită. Însă prin introducerea mașinilor, prin perfecționarea navigației și prin întregul proces tehnic de atunci, devenise necesară cunoașterea temeinică a legilor mișcării. Or, mișcarea implică procese de variație și de dependență între mărimi variabile în care variația trebuie să se poată face oricît de mică. Pentru mijloacele tehnice de atunci, inventarea logaritmilor a însemnat un admirabil și satisfăcător mijloc de simplificare și de grăbire a calculelor, după cum pentru tehnica de azi este necesară mașina electronică de calcul. Atunci s-a lărgit domeniul aritmeticii prin introducerea calculului cu numere algebrice. La rîndul ei, aritmetica transformată în algebră, a cuprins și calculele cu numere complexe. Azi domeniul algebrei s-a extins *prin introducerea operațiilor de orice fel de mărimi, de orice natură ar fi ele*. Și fiindcă aceste operații trebuiau definite în așa fel ca să fie compatibile cu elementele considerate, iată-ne în fața *atîtor algebre cîte mărimi diferite se cer supuse operațiilor* : algebre de vectori, algebre de matrici, algebre de compoziție, subalgebre etc. Și tot așa, dacă atunci, stabilindu-se o corespondență între *punct ca element geometric și o pereche de numere algebrice* s-a creat geometria analitică și apoi cea diferențială, problemele de azi au impus o corespondență mult mai largă între geometrie, aglebră și analiză, corespondență în care topologia a jucat rolul elementului de legătură.

— Bine, dar după cîte văd eu, te pricepi de minune și în aceste probleme moderne! Nu știu de ce te vaiți că ești un înstrăinat?

— Te înșeli, dragul meu! Tocmai aici e tragedia și durerea mea, că nu le pricep deloc! Lucrurile care ți le-am spus eu sînt vagi și la asta se rezumă aproape tot ce știu!

— Bine , dar dacă te-ai apuca să le studiezi sistematic, luîndu-le de la început, n-ai izbuti oare să te pui la curent?

— Tentația asta m-a încercat de mai multe ori, dar...

— Ai rezistat, nu? De ce?

— E greu să-ți explic! Mai întîi cred că este un fel de inerție a sistemului de gîndire! Se opune ori de cîte ori îi ceri să foreze necunoscutul cu alte instrumente decît acelea pe care le cunoaște. Văd bine că nu ar fi greu să pătrund noua structură și că, o dată înțelese elementele, prin generalizare

şi înlănţuire logică, ele duc spre probleme cu substrat analog cu acelea pe care le cunosc. Şi totuşi, în faţa mea se pune un geam de sticlă prin care nu pot trece.

— Sparge-l!

— Nu nu se mai poate. Sînt şi eu ca un bătrîn aşezat într-un fotoliu lîngă sobă. Focul arde domol, în odaie e cald, şi bine. Afară, chiar sub fereastra lui, copiii rîd, se dau cu săniuţa şi se bat cu zăpadă. Spectacolul e desfătător, el îl priveşte cu drag şi simte parcă în palme bulgării de zăpadă, bine bătuciţi şi rotunjiţi pe îndelete. Totul îl cheamă afară şi totuşi... la ce bun ar mai încerca să treacă dincolo de geam... Nu-i fericit şi nu-i pare rău. Priveşte cîteva clipe la această dezlănţuire fragedă de bucurie nouă şi apoi îşi continuă gîndurile lui vechi care-i dăruiesc bucuriile vîrstei lui. Da, dragul meu, sînt un înstrăinat faţă de mulţimea problemelor *noi* pe care le cercetează matematica. Pentru mine nu mai este posibilă vreo apropiere de ele. Dar sînt fericit că problemele vechi nu şi-au epuizat farmecul lor. Aşadar, nu mă pot plînge că nu am ce face! De altfel, aş vrea să nu mă înţelegi greşit şi să crezi că mă contrazic afirmînd că *nu s-a săpat o prăpastie între matematica de la începutul veacului şi aceasta de acum.* Nici vorbă! Problemele clasice au încă destule aspecte care se cer cizelate şi prin revistele de specialitate nu au încetat să apară asemenea articole, însă ele nu mai sînt la modă, sînt învechite ca şi plugul cu boi, alături de tractor! Tot aşa a fost şi în veacul al XVIII-lea. Cu tot avîntul şi terenul pe care cîştigau analiştii din partea lor, problemele puse de ei nu au provocat *o ruptură imediată şi definitivă a legăturilor cu vechea matematică greacă.* Geometria sintetică a lui Euclid a continuat să atragă pe mulţi matematicieni deşi nu mai era la *modă.* De pildă, în 1728, Guido Grandi a publicat o carte foarte apreciată care a stîrnit mult interes în lumea geometrilor prin frumuseţea demonstraţiilor pur geometrice. Numele ei a fost *Flori geometrice.*

— Flori?

— Da. Rozete şi clelii, cleliile fiind rozetele de pe o suprafaţă sferică.

— Clelii? De ce aşa, şi nu pur şi simplu rozete sferice?

— Fiindcă, după cîte îmi amintesc, el a dedicat această carte unei cucoane...

— Pe care o chema...

— Da o chema...

— Atunci? Probabil că nici Viviani nu şi-a înecat durerea înstrăinării în vin...

— Desigur că nu. A găsit consolarea în dragostea lui pentru geometrie şi prin ea a învins oarecum depresiunea lui sufletească.

— Vrei să spui că a mai publicat vreo lucrare?

— Da. Peste 9 ani, adică în 1701 — el moare în 1703 — apare ghicirea altei lucrări pierdute, ce aparţinea lui Aristeu cel bătrîn şi care se numea *Despre locurile solide*. Dar de data aceasta nu s-a mai găsit originalul ca să se poată stabili comparaţia, aşa cum a fost în cazul cărţii lui Apolloniu. Viviani i-a pus ca titlu : *Ghicirea geometrică a locurilor solide, în cinci cărţi care au fost pierdute, ale geometrului Aristeu cel bătrîn.*

— Pesemne că a existat încă un Aristeu, dacă acesta e „cel bătrîn".

— Nu se ştie, dar aşa se presupune.

— Şi, pe cînd a trăit Aristeu cel bătrîn?

— Prin veacul al IV-lea î.e.n., adică înainte de Euclid. Despre aceasta se ştie, tot din cele opt cărţi ale *Culegerii* lui Pappus de care ţi-am mai vorbit. Acolo se găsesc date istorice şi referinţe relative al vreo 30 de autori. Aristeu cel bătrîn e amintit în *Cartea a VII-a*. Anume că înainte de Euclid a fost scrisă o lucrare despre *construirea liniilor. Această lucrare* reprezenta un studiu special destinat numai acelora care au parcurs elementele geometriei, fiind astfel în stare să o înţeleagă. Aceste referinţe au îndemnat pe mai mulţi matematicieni care se ocupau cu studiul operelor geometrilor greci să încerce o reconstituire a acestor cărţi pierdute. De pildă, la începutul veacului al XVII-lea a făcut-o Marino Ghetaldi, apoi Fermat. Pe Viviani l-au tentat *Locurile solide* încă din tinereţe, şi ghicirea lor a fost terminată prin 1646. Atunci a vrut el să le dea la tipar, dar n-a reuşit. A încercat din nou, în 1673, cînd a obţinut aprobarea de imprimare, însă tipărirea s-a făcut abia în 1701 !

— Dar ce înseamnă *Locuri solide*?

— Este o numire specifică dată de geometrii greci, prin care se deosebeau curbele între ele. Dreptele şi cercurile se numeau *locuri plane* ; conicelor, adică elipsa, parabola şi hiperbola, li se spuneau *locuri solide*, probabil fiindcă toate trei se obţineau prin secţionarea unui con sau cilindru (figuri solide deci) cu un plan, iar celelalte curbe, care nu făceau parte din locurile plane şi solide, cum ar fi cuadratricea, con-

choida, spiralele, aveau denumirea de *locuri liniare*. Pappus afirma că, deși intitulată *Locuri solide*, lucrarea lui Aristeu cuprindea și vreo trei sau patru locuri liniare. S-ar părea că Viviani a imprimat lucrarea lui din tinerețe ca să demonstreze activitatea științifică și să poată primi în continuare pensia ce-i fusese acordată de către Ludovic al XIV-lea. Lucrarea, este de altfel, dedicată Regelui-Soare.

— Și cum a fost privită această nouă ghicire a sa?

— A fost o delectare pentru toți cei ce iubeau geometria antică, pentru că Viviani poseda metoda de lucru a geometrilor greci și era perfect integrat în modul lor de gîndire. El a stabilit o mulțime de teoreme frumoase și riguros demonstrate. Prin aceasta, lucrarea prezintă încă și azi un anumit interes, mai ales, fiindcă, după cum remarca Gino Loria, ea arată cum își închipuia Viviani, și o dată cu el toți matematicienii din veacurile al XVII-lea și al XVIII-lea, nivelul științific al epocii în care s-a scris acea operă.

— Bine, dar ar fi putut fi și altul?

— O dată ce opera e pierdută nu se poate afirma cu siguranță că stilul clasic pe care l-a folosit Viviani în această lucrare, *acela al lui Euclid și Apolloniu*, fusese însușit și de către matematicienii greci *de dinaintea lui Euclid*, în speță de Aristeu cel bătrîn! Atîta vreme cît nu mai există nici un criteriu de comparare a acestei lucrări cu vreo alta de dinainte de Euclid, nu se poate afirma nimic Nu-i exclus ca Viviani să fi mers mai departe decît a făcut-o Aristeu, cu atît mai mult cu cît teoremele stabilite de el nu se găsesc menționate nici de Pappus, nici de vreun alt comentator. Dacă vrei, am să-ți citez, atît cît îmi aduc acum aminte, una dintre primele probleme pe care Viviani le atribuie lui Aristeu.

— Desigur sînt curios!

— Se consideră o secțiune conică, adică o elipsă, parabolă sau hiperbolă și se duce într-un punct al ei, normala la curbă. Se prelungește această dreaptă pînă se întîlnește una dintre axele conice. Imaginează-ți acum lungimea segmentului de pe normală cuprins între punctul de pe curbă și punctul de intersecție dintre normala la curbă și axa conicei. Din punctul de intersecție aflat pe axă, se ridică o perpendiculară pe ea și se măsoară, începînd de la piciorul ei, lungimea despre care ți-am vorbit. Se obține astfel un nou punct, anume extremitatea segmentului perpendicular pe axa conicei. Dacă punctul de pe conică variază, o dată cu el variază și poziția acestui

punct. Viviani, respectiv Aristeu, se întreabă care este locul geometric al acestui punct?

— Într-adevăr, e o problemă frumoasă, dar cred că trebuie să fie foarte greu de rezolvat.

— Asta depinde de cunoştinţele celui ce o rezolvă. Pentru Viviani era un fleac! Şi pentru un elev din liceu care a învăţat geometria analitică problema e destul de uşoară, dacă o tratează analitic. Pentru tine poate că-i mai grea.

— Desigur, totuşi spune-mi care-i locul ?

— În general e tot o conică de acelaşi gen cu conica dată, bitangentă ei. Adică, dacă s-a considerat o elipsă, locul este tot o elipsă, dacă s-a considerat o parabolă, şi locul căutat este o parabolă, numai dacă s-a pornit de la un cerc, atunci locul nu mai este un cerc, ci o pereche de drepte! Viviani nu s-a mulţumit însă cu atît ; el a stabilit şi multe variante ale acestei probleme, fiecare avînd farmecul ei specific.

— Da, aşa fiind, cartea trebuie să fi stîrnit mult interes.

— Numai că prin calităţile ei, cartea a fost considerată de matematicieni ca un *adaos* la lucrarea lui Aristeu, şi nu ca o *reconstituire* a aceasteia. Aşa că, din nou entuziamul lui Viviani a suferit o dezamăgire. Întîi a fost cînd a înţeles că gîndirea antică, în toată admirabila ei splendoare, nu-i decît o metodă de cercetare a adevărului matematic, iar alături de ea au apărut alte metode noi, tot aşa de extraordinare, cerute de civilizaţia care se înfăptuia atunci... Însă, cu toată părerea mea de rău, a venit vremea să te desprinzi de raiul tău şi să o pornim spre casă. Uită-te la steaua ciobanului, care te priveşte fără să clipească parcă te-ar întreba „Ce te faci dacă-ţi iese înainte un lup?"

CONTROVERSA DINTRE POINCARÉ ȘI HILBERT ASUPRA FORMALISMULUI

Nepotul prietenului meu, Teodor Solonar, mi-a dat un telefon, întrebîndu-mă cînd ar putea veni împreună cu un prieten al lui, doctor în matematici, care s-a întors de la Paris, unde a fost invitat să țină o conferință în cadrul Seminarului de Filozofie și Matematică", de la „Școala Normală Superioară", avînd ca subiect : „Formalismul și controversa Poincaré-Hilbert".

După ce ne-am cunoscut și ne-am împărtășit diferite impresii legate de această călătorie, am trecut la subiectul ce ne interesa și pe care el era gata să-l ni-l comunice.

— Țin să vă anunț că am ales această temă fiindcă ea are ceva insolit, anume faptul că această controversă a avut loc cu mult înainte ca Hilbert să-și dezvolte pe deplin teoria sa *a formalismului complet*, adică implicînd și *teoria demonstrației*, aceasta s-a întîmplat la vreo zece ani după moartea lui Poincaré

— Cu alte cuvinte, Poincaré a sesizat partea slabă a acestei teorii chiar mai înainte de a fi formulată, în mod afirmativ, de Hilbert ?

— Da! Poincaré avea o intuiție genială, așa că se poate spune că l-a avertizat pe Hilbert că intenția lui de a formaliza aritmetica, și apoi întreaga matematică, nu va avea un rezultat satisfăcător!

— Și totuși, Hilbert nu a ținut seamă de avertizarea lui Poincaré?

— Desigur că nu, căci dacă doi matematicieni străluciți pot colabora într-o problemă de matematică pură, este exclusă orice colaborare sau înțelegere dintre ei, atunci cînd este vorba de o problemă de filozofie matematică,adică o problemă legată de fundamentele matematicii, de natură propozițiilor și a raționamentului matematic sau despre structura sistemelor matematice, dacă ei fac parte din categorii diferite de filozofi.


Jules Henri Poincaré


David Hilbert

— Mă mir că tocmai mata ai pus această întrebare, cînd eu, te-am auzit cu urechile mele, cînd îi spuneai Bădiei,că pentru Platon lumea matematicii era independentă de activitatea și de gîndirea omenească în timp ce pentru Aristotel nu exista o lume matematică în sine, ci numai aceea formată de ideile abstrase din activitatea omenească?

— Bine, Nucule, dar aceasta se întîmpla cu două milenii mai înainte!

— Însă, de-a lungul acestor două milenii, de cînd matematica este știința cea mai armonioasă și mai originală a spiritului omenesc, această atitudine s-a accentuat!

— Felix Klein, într-o conferință ținută la asfîrșitul secolului trecut, îi împărțea pe matematicieni în *logicieni*, *formaliști* și *intuiționiști*, explicînd astfel aceste denumiri: „Termenul *logician* este folosit aici fără nici o aluzie la logica matematică a lui Boole. El intenționează să arate că principala caracteristică a majorității acelora ce aparțin acestei clase constă în puterea lor logică și critică, în abilitatea de a forma definiții precise și a deduce din ele consecințe riguroase. *Formaliștii* excelează prin îndemînarea cu care tratează în mod formal anumite probleme date, prin născocirea unui algoritm pentru ele. În fine, *intuiționiștii* sînt acei care pun un accent deosebit pe intuirea geometrică nu numai în geometria pură, și ci în toate ramurile matematice" De altfel, chiar Poincaré a atacat această problemă în 1900 la Con-

gresul Internațional al matematicienilor care s-a ținut atunci la Paris. El a spus că este imposibil să studiezi operele matematicienilor fără să deosebești două tendințe opuse, sau, mai bine spus, două feluri de spirite cu totul diferite: unii sînt preocupați de logică, alții se lasă conduși de intuiție... Însă cu aceasta ne cam depărtăm de subiectul pe care vreau să-l dezvolt. De aceea, dați-mi voie să stabilesc cum s-au dezvoltat faptele care au adus la această controversă și care este în fond aceasta. Totul a început din 1899, cînd Hilbert a publicat cartea sa de mare răsunet *Bazele geometriei*, în care stabilește axiomatizarea completă a geometriei și susține că necontradicția axiomelor geometriei se bazează pe necontradicția aritmeticii.

— Exact, numai că tot atunci a izbucnit și *marea criză* din teoria mulțimilor, stîrnită de descoperirea paradoxelor matematice prin care argumentul că necontradicția geometriei se poate baza pe aceea a aritmeticii nu mai putea rămîne valabil!

— Aceasta l-a făcut pe Hilbert să se gîndească și la *axiomatizarea aritmeticii*, fapt cu totul surprinzător, căci aritmetica se considera dedusă în mod genetic, adică de la 1 la 2 de la 2 la 3 ș.a.m.d. Așa că, la Congresul matematicienilor din 1900, despre care am amintit, în conferința pe care a ținut-o el propusese o serie de probleme care se cer studiate, iar în a doua dintre ele, avînd ca titlu „Axiomele Aritmeticii", spunea: „Să se găsească un sistem de axiome care să determine și să definească noțiunile aritmetice. Să se examineze dacă aceste axiome sînt independente unele de altele și, în caz contrar, să se evidențieze părțile comune, astfel ca să se obțină un sistem de axiome complet independente. Apoi, să se dovedească faptul că aceste axiome sînt compatibile anume că: de la aceste axiome nu se poate ajunge la o contradicție, folosind un șir finit de deduceri logice ale lor". În această conferință, el dezvoltă problema formalismului în felul următor: „Fiecare sistem de noțiuni ne conduce la crearea unui sistem de simboluri destinate să servească drept instrumente de demonstrație. O demonstrație făcută cu ajutorul simbolurilor geometrice va fi perfect legitimă atunci cînd ea va pune în evidență axiomele care i-au stat la bază". Deși el se referă mai departe la „greutățile serioase pe care le prezintă anumite probleme, cînd încercăm să le rezolvăm pe această cale", el încheie optimist: „avem convingerea că în matematică va fi întotdeauna posibil sau să rezolvăm o problemă, sau

să arătăm că ea nu are soluție. Niciodată un matematician nu va fi pus în situația de a spune „Ignorabimus".

— Îmi închipui că de la această conferință, la care după cum ai spus, a asistat și Poincaré, au început și neînțelegerile cu privire la formalism!

— Aveți dreptate! Pentru că Poincaré nu a acceptat niciodată părerea că aritmetica ar putea fi axiomatizată, deoarece el considera că Aritmetica are la baza sa *principiul inducției complete*. Am să vă citez ce a scris el însuși în articolul intitulat „Număr și Mărime" : „Caracterul esențial al raționamentului prin recurență este că el conține, condensat, ca să spunem așa, într-o formă unică, o infinitate de silogisme... este un instrument care permite să se treacă de la finit la infinit... Este afirmarea puterii spiritului care se știe capabilă de a concepe repetiția nedefinită a aceluiași act, cînd acest act este posibil o dată. Spiritul are o intuiție directă a acestei puteri, iar experiența nu poate fi pentru el decît o ocazie de a folosi și, prin ea, de a lua cunoștință de ea... inducția matematică ne poate învăța ceva nou. Fără ideea acestei inducții, diferită în anumite privințe de inducția fizică, dar tot așa de fecundă ca și ea, construcția ar fi neputincioasă să creeze știința". Asupra acestei probleme revine și în articolul „Intuiția și logica matematică", unde găsim : „Logica nu ajunge. Știința demonstrației nu este întreaga știință și intuiția trebuie să-și păstreze rolul ei de complement, de complinire, aș spune de contrapondere sau de contraotravă a logicii".

Despre axiomele aritmeticii, Poincaré afirmă textual, că refuză să vorbească. În *Geometriile neeuclidiene* el scrie : „Axiomele geometriei nu sînt nici judecăți sintetice a priori, nici fapte experimentale. Sînt convenții... cu alte cuvinte axiomele geometriei (*nu vorbesc despre acelea ale aritmeticii*) nu sînt decît definiții deghizate".

— Și cum a reacționat Hilbert la aceste observații?

— Prin tăcere! Nu a răspuns nimic, dar la Congresul următor, din 1904, care s-a ținut la Heidelberg, își arată din nou *încrederea sa de nezdruncinat* în posibilitatea de a *axiomatiza aritmetica*. În conferința lui, intitulată : „Asupra fundamentelor logicii și ale aritmeticii", el observă : „Dacă în cercetarea fundamentelor geometriei sîntem cu toții de acord asupra căilor și scopurilor de urmat, nu putem afirma același lucru despre fundamentele aritmeticii ; aici se ridică unele contra altora părerile cele mai diferite". Dar încheie,

după ce le analizează : „Din partea mea, cred că dificultățile care se ridică *pot fi trecute* și că se poate întemeia noțiunea de număr într-un mod perfect riguros și satisfăcător. Metoda pe care o folosesc în acest scop este o metodă *axiomatică* și aș vrea s-o prezint pe scurt:

De obicei, considerăm Aritmetica drept o parte a Logicii, și cînd încercăm să o creăm luăm ca punct de plecare noțiunile căpătate în logică". Dar fiindcă această conferință a lui Hilbert a fost comentată de Poincaré, arătînd-o pe aceasta vom avea ocazia să ne întoarcem și la conținutul primei conferințe. Mai întîi, cîteva aluzii se găsesc în articolul „Matematica și logica", unde savantul francez se întreabă : „Matematica poate fi redusă la logică fără a mai recurge la principiile care îi sînt proprii? Există o întreagă școală, plină de entuziasm și credință, care se străduiește să o stabilească. Ea are limbajul ei special în care nu există cuvinte și se face uz numai de semne. Acest limbaj nu este înțeles decît de cîțiva inițiați..." În capitolul următor al aceluiași articol, Poincaré se referă la formalismul pe care Hilbert îl va dezvolta cu mulți ani mai tîrziu : „Ceea ce ne izbește mai întîi în noua matematică este caracterul ei pur formal..." Însă în articolul „Logica lui Hilbert", izbutește, în toată splendoarea ei, acest amestec original de analiză riguroasă și de ironie șăgalnică ; „Ajung acum la lucrarea principală a domnului Hilbert pe care a comunicat-o la Congresul matematicienilor de la Heidelberg... În această lucrare, în care se găsesc idei dintre cele mai profunde, autorul urmărește un scop analog cu acela al domnului Russell, dar în multe privințe el se depărtează de înaintașul său. Totuși, spune el, dacă privim mai îndeaproape, constatăm că în principiile logice, așa cum avem obișnuința să le prezentăm, se găsesc implicate anumite noțiuni aritmetice de exemplu, noțiunea de mulțime și, într-o oarecare măsură, noțiunea de număr. Astfel că ne vedem prinși într-un cerc și de aceea, ca să evităm orice paradox, îmi pare necesar să dezvoltăm simultan, principiile logicii și acelea ale aritmeticii".

Poincaré a întrerupt aici textul lui Hilbert ca să observe că : „pentru domnul Russell logica este anterioară aritmeticii, pentru domnul Hilbert ele sînt simultane... prefer să urmăresc pas cu pas dezvoltarea gîndirii lui Hilbert, citind textual pasajele cele mai importante. Să luăm mai întîi în considerație obiectul 1. Observăm, intervine din nou Poincaré, „că în felul acesta noi nu implicăm deloc noțiunea de număr, căci

este de la sine înțeles că 1 nu este aici decît un simbol și noi nu ne preocupăm să-i stabilim semnificarea". Acum Poincaré revine la textul lui Hilbert ; „Grupele formate cu acest obiect, repetat de două, trei sau mai de multe ori..." Ah?, de data aceasta exclamă Poincaré, surîzînd hîtru „nu mai este același lucru. Dacă introducem cuvintele *doi, trei*, și mai ales *de mai multe ori*, introducem noțiunea de număr și atunci definiția numărului întreg finit, pe care vom stabili-o îndată, ajunge prea tîrziu. Autorul e prea bine informat ca să nu fi observat această greșeală logică! De aceea, la sfîrșitul lucrării, el încearcă să procedeze ca un adevărat cîrpaci. Hilbert introduce apoi două obiecte simple, 1 și =, consideră toate combinațiile acestor două obiecte, apoi toate combinațiile dintre combinațiilor lor etc. Se înțelege, fără să se spună, că trebuie să uităm semnificarea obișnuită a celor două semne și să nu le atribuim nici una.

Mai departe, Poincaré continuă : „Să urmărim expunerea ideilor lui Hilbert. El introduce două axiome pe care le enunță în limbajul lui simbolic, dar care înseamnă, în limbajul profanilor, cum sîntem noi, că orice mărime este egală cu ea însăși și că orice operație executată pe două mărimi identice dă rezultate identice... Pentru el matematica nu are decît să combine simboluri pure și un adevărat matematician trebuie să raționeze pe ele fără să se preocupe de sensul lor. Așa că axiomele lui nu sînt pentru el ceea ce sînt pentru oamenii obișnuiți".

Cred că am citat îndeajuns din Poincaré ca să ne fie clară părerea lui despre această preocupare a lui Hilbert, de a axiomatiza aritmetica. Dar nu-i de ajuns ca să pătrundem în miezul ideilor lui Hilbert. Iată ideea originală pe care își va baza el, mai tîrziu, *metamatematica* : „Privim demonstrația însăși ca o noțiune matematică. Este o mulțime finită ale cărei elemente sînt legate prin propoziții care afirmă că demonstrația considerată permite să tragem concluzii de la axiome la propoziții. Totul revine deci la a stabili dacă o asemenea demonstrație implică contradicții și atunci ea nu ar mai fi, după convențiile noastre, considerată ca existentă. Acesta este punctul de vedere general al teoriei demonstrației, prin care Hilbert considera că ar putea consolida matematica. Dar Poincaré, aruncînd o privire indiferentă peste aceste linii, continuă : „Sfîrșitul memoriului domnului Hilbert este cu totul enigmatic și nu vom mai insista asupra lui. Contradicțiile se înmulțesc, se simte că autorul este,

în mod vag, conștient de greșelile logice pe care le-a comis și că încearcă zadarnic să cîrpească crăpăturile raționamentului său. Ce putem spune? În loc *să demonstreze că definiția bazată pe axioma inducției complete nu duce la nici o contrazicere, domnul Hilbert se furișează așa cum s-au furișat și domnii Russell și Couturat, pentru că povara este prea grea*". Și, ca și cum atît n-ar fi fost de ajuns, iată sfîrșitul: „Printre rezultate, unele, multe chiar, sînt solide și destinate să rămînă. Dar să admitem că ei au rezolvat dezbaterea dintre Kant și Leibniz și că au lichidat teoria kantiană a matematicii nu este, desigur, exact! Nu știu dacă au crezut aceasta cu adevărat, dar dacă au crezut-o, s-au înșelat".

Hilbert nu a răspuns nimic la observațiile lui Poincaré, dar mulți ani de aici înainte nu va mai reveni la problema axiomatizării aritmeticii.

— Drept să spun, n-aș fi vrut să fiu în locul lui Hilbert, fiindcă problema aceasta, a axiomatizării aritmeticii, se pare că îi era foarte dragă!

— E adevărat, deoarece el a avut un real succes cu cartea în care a prezentat bazele geometriei și în care a stabilit o sistematizare riguroasă a axiomelor geometriei. Însă existau și multe alte probleme interesante care l-au acaparat imediat!

— De altfel, nici Poincaré nu a mai continuat polemica, și peste 5 ani el a fost invitat de Hilbert, profesor la Göttingen, să vie acolo ca să țină cîteva conferințe.

— Și Poincaré a primit invitația?

— Da, s-a dus la Göttingen și a vorbit studenților de acolo „Despre ecuațiile integrale" și despre „Teoria relativității", ambele subiecte foarte la modă atunci, și care erau studiate și de Hilbert.

— Oare, au mai deschis ei vorba despre axiomatizare?

— Sînt sigur că nu! Și îmi bazez afirmația pe faptul că, în anul următor, cînd Poincaré a fost invitat să facă un raport asupra activității lui Hilbert, pentru ca acesta să obțină premiul internațional „Bolyai" acordat de Academia ungară de științe matematicianului care a contribuit cel mai mult la progresul matematicienilor în ultimii cinci ani, Poincaré a discutat în mod elogios toate lucrările lui Hilbert, dar nu a pomenit nici un cuvînt despre încercările lui de formalizare a aritmeticii!

— După cîte știu, cu cinci ani mai înainte, atunci cînd s-a înființat acest premiu internațional, el a fost decernat lui Poincaré.

— Da, pentru activitatea lui din ultimii 25 de ani!

— Atunci ce l-a determinat pe Hilbert să revină la acest subiect?

— Exact, nu o știu. Știu doar că în 1917, la 5 ani după moartea lui Poincaré, Hilbert a susținut la Zürich o conferință avînd ca titlu „Gîndirea axiomatică". În ea, el repetă, într-un mod mai sistematic, ideile pe care le expusese cu 12 ani mai înainte. Am să citez din această conferință : „Dacă observăm mai îndeaproape o teorie determinată, constatăm în mod invariabil că edificiul conceptelor trebuie să aibă ca bază în domeniul științific un număr restrîns de propoziții excepționale, care sînt suficiente prin ele însele să construiască întregul edificiu după principiile logice. Toate aceste principii fundamentale pot, la prima vedere, să fie considerate ca axiomele domeniilor științifice speciale... Acest punct de vedere se afirmă cu claritate în matematica pură." Apoi, după ce a discutat pe larg și problema independenței axiomelor și absența contradicțiilor dintre ele, a ajuns la teoria demonstrației : „Problemele esențiale pe care le-am caracterizat... îmi apar ca un domeniu important a cărui descoperire este recentă. Ca să cucerim acest domeniu, trebuie, după părerea mea, să se considere ca obiect al unei cercetări speciale, conceptul de demonstrație, specific, matematică..." Dar nici acum problema nu-i dusă mai departe și ea rămîne încă mulți ani în această fază de proiect, Hilbert recunoscînd ca „realizarea acestui program este pentru moment departe de a fi terminat". Dar ceea ce l-a determinat pe Hilbert să reia și să continue cercetările asupra formalismului complet, adică a acelei prezentări a matematicii în care toate elementele și toate etapele de raționament să fie formalizate, a fost declanșarea și persistarea marii crize a matematicilor...

— Ai mai folosit o dată această expresie, n-ai vrea să o lămurești?

— Asta o pot face eu, fiindcă o știu bine.

— Mă rog, îmi pare bine să te ascult!

— Expresia „marea criză a matematicii" aparține lui H. Weil și el a folosit-o atunci cînd s-a văzut în fața dificultăților apărute în teoria mulțimilor, dificultăți considerate de natură pur logică sau, mai bine zis, de natură filosofică. De aceea, matematicienii au căutat să se asigure de condițiile de necontradicție, reexaminînd îndeaproape procedeele de raționament folosite în fundamentele matematicii. Dar această

intenție s-a transformat curînd într-o polemică între logicieni, intuiționiști, formaliști ș.a.

— Așa-i! De altfel și formalismul conceput de Hilbert a fost inspirat de metoda formalistă folosită de logicieni, care au arătat că se pot exprima raționamentele matematice prin anumite simboluri, astfel că demonstrația să se poată reduce la niște reguli, prin care se putea trece de la o serie de formule la altele. Necontradicția trebuia dovedită demonstrînd că este imposibil să se deducă două formule contradictorii A și $\bar{A}$. Hilbert a prezentat în 1928, la Congresul internațional al matematicienilor, care s-a ținut atunci la Bologna, rezultatul obținut de el asupra formalizării complete a matematicii, prin care era sigur că se va putea „înlătura în mod definitiv orice îndoială asupra perfectei siguranțe a raționamentului matematic, îndoială care s-a creat prin descoperirea paradoxelor sau prin amputarea anumitor capitole din matematică pe care o cereau intuiționiștii. Ca să stabilească dovada coerenței interne a acestei teorii formalizate, el a imaginat, în colaborare cu elevul său P. Bernays, *o metodă de demonstrație* în care a considerat *această formalizare însăși* ca obiect al unui nou studiu matematic, adică i-a suprapus o *metamatematică*. Analiza metamatematicii trebuia să aibă ca obiect sistemul expresiilor folosite în teoria formalizată, abstracție făcînd de semnificarea lor.

— Mi se pare că iluzia reușitei lui David Hilbert nu a durat decît trei ani, căci în 1931 a fost publicată teorema lui Kurt Gödel!

— Așa-i! Intuiția lui Poincaré nu a dat greș!

— Am citit că matematicianul francez Jules Tannery a scris despre H. Poincaré astfel: „marele matematician și filosof avea obiceiul să ciocănească, zîmbind, principiile matematice, ca să asculte dacă nu sună a gol". Oare așa a făcut și cu „formalismul" pe care-l preconiza Hilbert?

— Probabil! În privința aceasta am să citez cele scrise despre nereușita tentativei lui Hilbert din *Elemente de istorie a matematicii* a lui Bourbaki, lucrare pe care am mai folosit-o aici. La pagina 58 găsim „recunoscînd implicit temeiul criticii lui Poincaré, Hilbert admite că, în metamatematică, raționamentele aritmetice pe care le folosește nu se pot baza decît pe intuiția noastră despre întregi (și nu pe aritmetica formalizată). Aceasta însă l-a determinat să restrîngă raționamentele la procedee finite". Or, tocmai *acest caracter finitist* pe care Hilbert l-a impus metamatematicii a dus teoria

lui la un eşec şi în loc să poată „demonstra, o dată pentru totdeauna că în matematici contradicţiile sînt imposibile", teorema lui Gödel a dovedit că *este imposibil de a stabili necontradicţia aritmeticii* dacă în demonstraţie nu intervin mijloace mai puternice decît acelea ale metamatematicii! Mai mult, Gödel a demonstrat că orice sistem axiomatic este sau incomplet sau indecidabil, anume el a construit o propoziţie formală care nu aparţine sistemului considerat, nici ea şi nici negaţia ei. Demonstrînd că există propoziţii aritmetice adevărate, dar care nu provin din grupul de axiome considerat, metamatematica pe care a construit-o Hilbert se dovedea a *avea un caracter restrîns*, ea neputînd demonstra propria ei contradicţie prin mijloacele ei proprii!

— Ai avut dreptate să spui că această controversă dintre Poincaré şi Hilbert avea un caracter insolit, pentru că Poincaré a intuit şi l-a avertizat pe Hilbert cu mai bine de două decenii înainte, că prin formalizarea aritmeticii şi a întregii matematici chiar, nu va fi în stare să stabilească deplina ei coerenţă internă.

— Însă, consider că am fi nedrepţi faţă de memoria lui Hilbert dacă ne-am opri aici. Am să citesc ce a scris, în 1938, colaboratorul lui Hilbert, Paul Bernays: „Teoria demonstraţiei trece printr-o criză şi mulţi au şi folosit prilejul de a anunţa că încercarea hilbertiană a eşuat. Această părere îşi are explicaţia în faptul că programul propus de Hilbert pentru teoria demonstraţiei are nevoie, după toate aparenţele să fie revăzut, revederea privind mai ales fundamentele metodice. În termeni tehnici iată despre ce este vorba: Pentru raţionamente metamatematice trebuie mijloace mai puternice decît acelea la care s-a restrîns Hilbert, folosind metode legate de gîndirea finită... De altfel, judecînd rezultatele teoriei demonstraţiei, trebuie să observăm că demonstraţiile asupra necontradicţiei formalismului aritmetic nu reprezintă singurul progres realizat prin cercetările metamatematice din ultimii ani. În particular, în problemele despre decidabilitate şi acelea ale calculabilităţii efective, rezultate remarcabile au fost obţinute prin lucrările lui Gödel, Church, Turing, Klein şi Rosser. Metamatematica are, începînd de acum, o asemenea semnificare, încît importanţa ei poate fi apreciată independent de orice doctrină filozofică asupra fundamentelor matematicii".

— Asta-i adevărat! Formalismul s-a transformat într-un instrument necesar pentru noile descoperiri şi azi putem con-


Kurt Gödel


Leopold Kronecker

sidera că el apare *ca un scop în sine*, deşi scopul iniţial pentru care a fost creat, nu a fost realizat.

— Îţi mulţumesc foarte mult, dragă Nucule, că ai avut inspiraţia de a-l aduce aici pe prietenul tău. Sper că de acum înainte a devenit şi prietenul meu şi de aceea îl rog, cînd va avea timp, să veniţi împreună ca să mai zăbovim la taclale! Gîndul mi-a rămas la aceşti doi matematicieni care, deşi însufleţiţi de o nemărginită dragoste pentru matematici, nu s-au putut înţelege.

— Bine, dar mata singur mi-ai spus odată că însuşi Poincaré a remarcat că sînt oameni care nu se pot înţelege, pentru că nu vorbesc aceeaşi limbă; aici unul vorbea limba intuiţiei, celălalt a formalismului!

— Are dreptate Nucu! De altfel, acesta nu-i singurul caz pe care îl cunoaşte istoria matematicilor. În antichitate a existat cuplul Arhimede-Apollonius din Perga. Dovada controversei lor a rămas înregistrată în titlul unei cărţi a lui Apollonius, care, din păcate, s-a pierdut *Okitokion*, adică „Naşteri rapide". Prin secolul al VI-lea, Eutochios, care a mai apucat cartea, scria că autorul îl satiriza, prin acest titlu, pe Arhimede, în legătură cu două dintre lucrările lui: *Arenaria* şi *Măsura cercului*, arătînd pe de o parte o metodă mai sistematică de numărare decît aceea indicată de Arhimede şi, apoi, o metodă mai precisă de a stabili valoarea lui π.

— Pot aminti şi eu de un caz mai apropiat de timpurile noastre : Descartes şi Pascal! În scrierile lui Pascal există chiar o frază în care spunea că trebuie să scrie contra lui Descartes, care aprofundează ştiinţa! El nu a apreciat entuziasmul şi îndrăzneala cu care Descartes găsea explicaţiile fenomenelor fizice sau propunea probleme matematice noi.

— S-ar mai putea aminti şi cazul tragic al neînţelegerii dintre Leopold Kroneker şi Georg Cantor. Kronecker rămîne în istoria matematicilor prin afirmaţia lui bizară : „Natura a creat numerele întregi, restul e opera omului", afirmaţie care l-a făcut să nu recunoască nici numerele algebrice, nici cele transcendente şi cu atît mai puţin teoria mulţimilor, stabilită de Cantor. Îndată de Cantor, care-i fusese student, a publicat primul memoriu asupra teoriei mulţimilor şi ale numerelor algebrice, în care a introdus părerile sale despre numerele transfinite, controversa a început. Dar ea a fost dusă în termeni aşa de aspri încît a fost în stare să distrugă echilibrul mintal a lui Cantor şi el a trebuit să-şi petreacă după aceea o bună parte a vieţii lui într-o casă de boli mintale!

— Ca să nu terminăm convorbirea noastră cu această relatare tristă am să vă citesc cîteva rînduri din *Introducerea* lui Poincaré, pe care a pus-o în volumul intitulat *Valoarea ştiinţei*. „Toţi oamenii sînt de acord că spiritul matematicienilor nu se potriveşte cu acela al fizicienilor sau al naturaliştilor, însă nici matematicienii înşişi nu se potrivesc între ei, unii nu cunosc decît logica implacabilă, alţii se bazează pe intuiţie şi văd în ea izvorul unic al descoperirilor. Ar putea fi, în aceasta, un motiv de neîncredere. Cu spirite aşa de deosebite, teoremele matematice înseşi mai pot apărea la fel? Adevărul care nu-i acelaşi pentru toţi, mai este el adevăr? Dar, privind lucrurile mai îndeaproape, vedem că aceşti lucrători, aşa de deosebiţi, colaborează la o operă comună care nu s-ar putea săvîrşi fără contribuţia lor. Şi aceasta-i de ajuns, ca să ne liniştească!

— Rîndurile citite de dv. ne-au liniştit cu adevărat! Ba, chiar aş spune că mie mi-au dat curajul să vă promit că întîlnirea noastră viitoare va fi o prezentare de cazuri de matematicieni care au fost prieteni şi au colaborat, de pildă *Arthur Cayley* şi *James J. Sylvester* sau *Georg Cantor* şi *Richard Dedekind* şi mai ales acela al grupului Bourbaki, pe care l-am amintit astăzi.

CUPRINS

Lector : G. FOLESCU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

Bun de tipar 25.VI.1987. Apărut 1987
Comanda nr. 2728. Coli de tipar 14,5, planșe



Tiparul executat sub comanda nr. 73
la Întreprinderea poligrafică Iași
str. 7 Noiembrie nr. 49
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA



EDITURA ALBATROS



Lei 11,50